QUESITI DI MATEMATICA

1. INTRODUZIONE ALL'ANALISI - LE FUNZIONI

EXERCISE 2. Risolvere le seguenti disuguaglianze:

(1) $|x-1|<3$
(2) $|x+1|>2$
(3) $|2x+1|<1$
(4) $|x-1|<|x+1|$

Caso: (a): $|x-1|<3$, risolvo $\begin{cases} x-1<3 \\ x\geq 1 \end{cases} \cup \begin{cases} -x+1<3 \\ x<1 \end{cases}$, si avrà quindi $\begin{cases} x<4 \\ x\geq 1 \end{cases}$ cioè $1\leq x<4$ e $\begin{cases} x>-2 \\ x<1 \end{cases}$ cioè $-2<x<1$. L'unione tra le due dà la soluzione $-2<x<4$

Caso: (b): $\begin{cases} x+1>2 \\ x\geq -1 \end{cases} \cup \begin{cases} -x-1>2 \\ x<-1 \end{cases}$, si avrà quindi $\begin{cases} x>1 \\ x\geq -1 \end{cases}$ cioè $x>1$ e $\begin{cases} x<-3 \\ x<-1 \end{cases}$ cioè $x<-3$, pertanto $x<-3\cup x>1$

Caso: (c): $\begin{cases} 2x+1<1 \\ x\geq -\frac{1}{2} \end{cases} \cup \begin{cases} -2x-1<1 \\ x<-\frac{1}{2} \end{cases}$, si avrà quindi $\begin{cases} x<0 \\ x\geq -\frac{1}{2} \end{cases}$ cioè $-\frac{1}{2}\leq x<0$ e $\begin{cases} x>-1 \\ x<-\frac{1}{2} \end{cases}$ cioè $-1<x<-\frac{1}{2}$. pertanto $-1<x<0$

Caso: (d): in questo caso, $\begin{cases} -x+1<-x-1 \\ x<-1 \end{cases} \cup \begin{cases} -x+1<x+1 \\ -1\leq x<1 \end{cases} \cup \begin{cases} x-1<x+1 \\ x\geq 1 \end{cases}$, si avrà quindi $\begin{cases} 0<-2 \\ x<1 \end{cases}$ cioè non si hanno soluzioni e $\begin{cases} x>0 \\ -1\leq x<1 \end{cases}$ cioè $0<x<1$ e $\begin{cases} 0<2 \\ x\geq 1 \end{cases}$ cioè $x\geq 1$; si avrà pertanto $x>0$

EXERCISE 3. Trovare $f(-1), f(0), f(1), f(2), f(3), f(4)$ se $f(x)=x^3-6x^2+11x-6$

Si tratta di trovare le immagini dei valori di x indicati, sostituendo all'incognita il valore indicato:

$f(-1)=(-1)^3-6\cdot(-1)^2+11\cdot(-1)-6=-1-6-11-6=-24$**:**
$f(0)=(0)^3-6\cdot(0)^2+11\cdot(0)-6=-6$**:**
$f(1)=(1)^3-6\cdot(1)^2+11\cdot(1)-6=1-6+11-6=0$**:** in questo caso $x=1$ è una radice della funzione polinomiale
$f(2)=(2)^3-6\cdot(2)^2+11\cdot(2)-6=8-24+22-6=0$**:** anche $x=2$ è una radice
$f(3)=(3)^3-6\cdot(3)^2+11\cdot(3)-6=27-54+33-6=0$**:** $x=3$ è un'altra radice
$f(4)=(4)^3-6\cdot(4)^2+11\cdot(4)-6=64-96+44-6=6$**:**

Avendo trovato le 3 radici di una funzione polinomiale di terzo grado, possiamo vedere che, tale polinomio si può scomporre nel prodotto dei seguenti fattori: $f(x)=(x-1)(x-2)(x-3)$

EXERCISE 4. Trovare $f(0), f(-\frac{3}{4}), f(-x), f(\frac{1}{x}), 1/f(x)$ se $f(x)=\sqrt{1+x^2}$

$f(0)=\sqrt{1+(0)^2}=1$**:**
$f\left(-\frac{3}{4}\right)=\sqrt{1+\left(-\frac{3}{4}\right)^2}=\frac{5}{4}$**:**
$f(-x)=\sqrt{1+(-x)^2}=f(x)=\sqrt{1+x^2}$**:** la funzione è quindi pari
$f(\frac{1}{x})=\sqrt{1+\left(\frac{1}{x}\right)^2}=\sqrt{\frac{x^2+1}{x^2}}=\frac{1}{|x|}\sqrt{1+x^2}=\frac{f(x)}{|x|}$**:**
$\frac{1}{f(x)}=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}=\frac{\sqrt{1+x^2}}{1+x^2}=\frac{f(x)}{[f(x)]^2}$**:**
:

EXERCISE 5. Sia $f(x)=\arccos(\log x)$. Calcolare $f\left(\frac{1}{10}\right), f(1), f(10)$

$f\left(\frac{1}{10}\right)=\arccos\left(\log\frac{1}{10}\right)=\arccos(-\log 10)=\arccos(-1)=\pi$**:**
$f(1)=\arccos(\log 1)=\arccos(0)=\frac{\pi}{2}$**:**
$f(10)=\arccos(\log 10)=\arccos(1)=0$**:**
:

EXERCISE 6. Sia $f(x)$ una funzione lineare. Determinare questa funzione se $f(-1)=2$ e $f(2)=-3$

Soluzione:: Una funzione lineare in forma esplicita è del tipo $y=mx+q$, una funzione, quindi, con due parametri, m,q. Per determinarli, bastano quindi le due condizioni.

$$\begin{cases} 2=-1m+q \\ -3=2m+q \end{cases} \quad \begin{cases} 2=-1m+q \\ 5=-3m \end{cases} \quad \begin{cases} m=-\frac{5}{3} \\ q=2-\frac{5}{3}=\frac{1}{3} \end{cases}$$

la funzione richiesta è quindi: $y=-\frac{5}{3}x+\frac{1}{3}$ o in forma implicita, $5x+3y-1=0$

EXERCISE 7. Determinare una funzione razionale intera $f(x)$ di secondo grado se $f(0)=1,\ f(1)=0,\ f(3)=5$.

Soluzione:: Una funzione razionale espressa nella forma esplicita è del tipo $y=ax^2+bx+c$. E' una funzione con tre parametri a,b,c. La loro individuazione richiede l'impostazione e la risoluzione di un sistema tre equazioni tre incognite

$$\begin{array}{c} f(0)=1 \\ f(1)=0 \\ f(3)=5 \end{array} \left\{ \begin{array}{c} 1=c \\ 0=a+b+c \\ 5=9a+3b+c \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{c} a=-1-b \\ -9-9b+3b=4 \\ c=1 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{c} a=\frac{7}{6} \\ b=-\frac{13}{6} \\ c=1 \end{array} \right.$$

l'equazione di secondo grado cercata è pertanto $y=\frac{7}{6}x^2-\frac{13}{6}x+1$

EXERCISE 8. Si sa che $f(4)=-2$ e che $f(5)=6$. Calcolare il valore approssimato di $f(4,3)$ considerando la funzione $f(x)$ lineare per il segmento $4\leq x\leq 5$ (*interpolazione lineare della funzione*).

Soluzione:: l'interpolazione lineare presuppone che la curva tra i due punti possa essere approssimata dalla retta che congiunge i due punti $A(4;-2)$ e $B(5;6)$.

$$\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{x-x_1}{x_2-x_1}$$

$$\frac{y+2}{6+2}=\frac{x-4}{5-4}$$

$$\frac{y+2}{8}=x-4$$

da cui si ottiene:

$$y=8x-34$$

calcoliamo ora $f(4,3)$ sostituendo $x=4,3$. Si ha

$$y=8\cdot 4,3-34=0,4$$

EXERCISE 9. Trovare il campo di esistenza delle funzioni:

- $y=\sqrt{x+1}$: nel caso di una radice di indice pari, il radicando deve essere non negativo

$$x+1\geq 0 \qquad x\geq -1 \qquad [-1;+\infty)$$

- $y=\sqrt[3]{x+1}$: la radice ha indice dispari; ha significato sia per qualunque radicando $(-\infty;+\infty)$
- $y=\frac{1}{4-x^2}$: una funzione razionale fratta è sempre definita tranne per i valori che annullano il denominatore

$$x\neq \pm 2$$
$$(-\infty;-2) \quad (-2;+2) \quad (2;+\infty)$$

- $y=\sqrt{x^2-2}$: come prima, il radicando deve essere non negativo

$$x^2-2\geq 0 \qquad x\leq -\sqrt{2} \qquad \vee x\geq \sqrt{2}$$
$$\left(-\infty;-\sqrt{2}\right) \quad \left(\sqrt{2};+\infty\right)$$

- $y=\sqrt{2+x-x^2}$: il radicando deve essere non negativo

$$-x^2+x+2\geq 0$$
$$x_{1,2}=\frac{-1\pm\sqrt{1+8}}{-2}=2;-1$$
$$-1\leq x\leq 2$$

il campo di esistenza è pertanto $[-1;2]$

- $y=\sqrt{-x}+\frac{1}{\sqrt{2+x}}$: in uesto caso vi sono due radicali e quindi due saranno le condizioni che dovranno essere contemporaneamente soddisfatte:
$$\begin{cases} -x\geq 0 & x\leq 0 \\ 2+x>0 & x>-2 \end{cases}$$
l'intervallo comune è $(-2;0]$
- $y=\lg\left(\frac{2+x}{2-x}\right)$: la funzione logaritmica è definita quando l'argomento è maggiore di zero:
$$\frac{2+x}{2-x}>0$$
risolviamo la disequazione fratta
$$\begin{array}{ll} N>0 & x>-2 \\ D>0 & x<2 \end{array}$$
si ottiene, come campo di esistenza, $(-2;2)$.
- $y=\arccos\frac{2x}{1+x}$: la funzione inversa del coseno richiede che il suo argomento sia compreso tra -1 e 1 e inoltre l'argomento frazionario richiede che il denominatore non si annulli,
$$\begin{cases} -1\leq \frac{2x}{1+x}\leq \\ x+1\neq 0 \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{2x}{1+x}\geq -1 \\ \frac{2x}{1+x}\leq 1 \\ x\neq -1 \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{3x+1}{1+x}\geq 0 \\ \frac{x-1}{1+x}\leq 0 \\ x\neq -1 \end{cases}$$
studiamo le due disequazioni fratte, la cui risoluzione assorbe la condizione relativa al denominatore
  - $\frac{3x+1}{1+x}\geq 0$ $\begin{array}{ll} N\geq 0 & x\geq -\frac{1}{3} \\ D>0 & x>-1 \end{array}$ da cui si ottiene $x<-1\vee x\geq -\frac{1}{3}$
  - $\frac{x-1}{1+x}\leq 0$ $\begin{array}{ll} N\geq 0 & x\geq 1 \\ D>0 & x>-1 \end{array}$ da cui si ottiene $-1<x\leq 1$
  - riassumendo le condizioni trovate, che devono valere contemporaneamente, si ha $-\frac{1}{3}\leq\leq 1$ oppure $[-\frac{1}{3};1]$
- $y=\sqrt{\sin 2x}$: il radicale deve essere non negativo
$$\sin\geq 0 \quad 2k\pi\leq 2x\leq \pi+2k\pi \quad k\pi\leq x\leq \pi+k\pi$$

EXERCISE 10. Sia $f(x)=2x^4-3x^3-5x^2+6x-10$. Trovare
$$\varphi(x)=\frac{1}{2}[f(x)+f(-x)] \quad e \quad \psi(x)=\frac{1}{2}[f(x)-f(-x)]$$

Soluzione:: primo caso
$$\begin{aligned} \varphi(x) &= \frac{1}{2}\left[2x^4-3x^3-5x^2+6x-10+2x^4+3x^3-5x^2-6x-10\right] \\ &= \frac{1}{2}\left(4x^4-10x^2-20\right) \\ &= 2x^4-5x^2-10 \end{aligned}$$
secondo caso
$$\begin{aligned} \psi(x) &= \frac{1}{2}\left[2x^4-3x^3-5x^2+6x-10-2x^4-3x^3+5x^2+6x+10\right] \\ &= \frac{1}{2}\left(-6x^3+12x\right) \\ &= -3x^3+6x \end{aligned}$$
osservando i due risultati si può osservare che: $f(x)=\varphi(x)+\psi(x)$

EXERCISE 11. La funzione $f(x)$ definita nel campo simmetrico $-l<x<l$ si dice *pari* se $f(x)=f(-x)$ e *dispari* se $f(-x)=-f(x)$. Indicare se le funzioni sono pari o dispari:

- $f(x)=\frac{1}{2}\left(a^x+a^{-x}\right)$: calcoliamo $f(-x)=\frac{1}{2}\left(a^{-x}+a^x\right)$ da cui si ha $f(x)=f(-x)$ funzione pari
- $f(x)=\sqrt{1+x+x^2}-\sqrt{1-x+x^2}$: calcoliamo $f(-x)=\sqrt{1-x+x^2}-\sqrt{1+x+x^2}$ da cui si ha $f(x)=f(-x)$ funzione pari
- $f(x)=\lg\frac{1+x}{1-x}$: calcoliamo $f(-x)=\lg\frac{1-x}{1+x}=\lg\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^{-1}=-\lg\frac{1+x}{1-x}=-f(x)$ funzione dispari

EXERCISE 12. Dimostrare che ogni funzione $f(x)$ definita nell'intervallo $-l<x<l$ può essere espressa come somma di una funzione pari e di una funzione dispari.

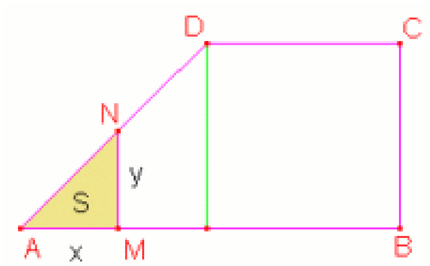
Soluzione:: abbiamo visto in precedenza che

$$f(x)=\varphi(x)+\psi(x)=\frac{1}{2}[f(x)+f(-x)]+\frac{1}{2}[f(x)-f(-x)]$$

ma $\varphi(x)=\frac{1}{2}[f(x)+f(-x)]$ è pari poiché $\varphi(x)=\varphi(-x)=\frac{1}{2}[f(-x)+f(x)]$ e $\psi(x)=\frac{1}{2}[f(x)-f(-x)]$ è dispari poiché $\psi(-x)=\frac{1}{2}[f(-x)-f(x)]=-\psi(x)$; ne segue che

$$f(x)=\underset{pari}{\varphi(x)}+\underset{dispari}{\psi(x)}$$

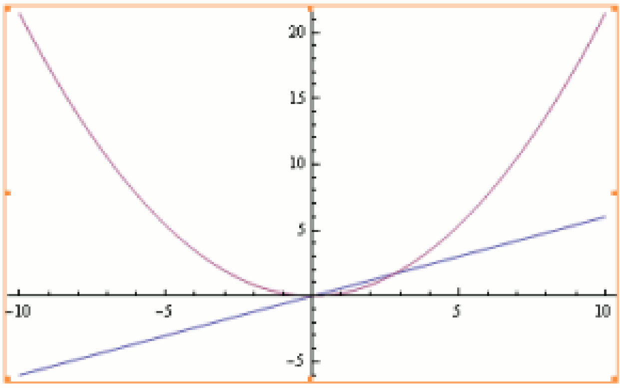
EXERCISE 13. Esprimere la lunghezza del segmento $y=MN$ e l'area S della figura AMN come funzioni di $x=AM$ (fig.1), dove $AB=a$; $BC=b$; $AH=c$. Costruire il grafico di queste funzioni



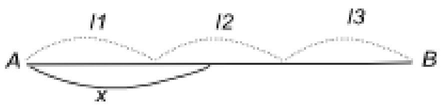
Soluzione:: I due triangoli rettangoli AHD e AMN sono tra loro simili, perciò $AH:BC=AM:MN \quad c:b=x:y$. Ne segue che $y=\frac{b}{c}x$ con $b>c$. La superficie del triangolo è

$$S=x\cdot\frac{b}{c}x\cdot\frac{1}{2}=\frac{b}{2c}x^2$$

con $0\leq x\leq c$
La funzione $y(x)$ è rappresentabile mediante una retta passante per l'origine (senza termine noto) e con coefficiente angolare $\frac{b}{c}$, mentre la funzione $S(x)$ è una parabola di vertice $V(0;0)$ e concavità rivolta verso l'alto.



EXERCISE 14. 1 - La densità lineare (massa dell'unità di lunghezza) di una asta $AB=l$, vedi figura, è rispettvamente uguale a q_1,q_2,q_3 per i segmenti $AC=l_1$, $CD=l_2$, e $DB=l_3$ con $(l_1+l_2+l_3=l)$. Esprimere la massa m del segmento di lunghezza variabile $AM=x$ di questa asta in funzione di x. Costruire il grafico di questa funzione.



Soluzione:: le densità lineari nei vari tratti sono indicate da:

$$q_1=\frac{m_1}{l_1}\quad q_2=\frac{m_2}{l_2}\quad q_3=\frac{m_3}{l_3}$$

- se $0\leq x\leq l_1$ allora $q_1=\frac{m}{x}$ e $m=q_1x$. negli estremi: $x=0\Rightarrow m=0$; $x=l_1\Rightarrow m=m_1$
- se $l_1\leq x\leq l_1+l_2$ allora $m=q_1l_1+q_2(x-l_1)=q_1l_1+q_2x-q_2l_1=q_2x+l_1(q_1-q_2)$; negli estremi: $x=l_1\Rightarrow m=m_1$; $x=l_1+l_2\Rightarrow m=m_2+m_1$
- se $l_1+l_2\leq x\leq l_1+l_2+l_3$ allora $m=q_1l_1+q_2l_2+q_3(x-l_1-l_2)=q_3x+l_1(q_1-q_3)+l_2(q_2-q_3)$; negli estremi: $x=l_1+l_2\Rightarrow m=m_1+m_2$; $x=l\Rightarrow m=q_3l_1+q_3l_2+q_3l_3+q_1l_1-q_3l_1+q_2l_2-q_3l_2=m_1+m_2+m_3$

- Il grafico è una retta nel piano x, m

EXERCISE 15. Trovare $\varphi[\psi(x)]$ e $\psi[\varphi(x)]$ se $\varphi(x) = x^2$ e $\psi(x) = 2^x$

Soluzione:: $\varphi[\psi(x)] = (2^x)^2 = 2^{2x}$; $\psi[\varphi(x)] = 2^{x^2}$

EXERCISE 16. Trovare $f\{f[f(x)]\}$ se $f(x) = \frac{1}{1-x}$

Soluzione:: $f[f(x)] = \frac{1}{1-\frac{1}{1-x}} = \frac{1}{\frac{1-x-1}{1-x}} = 1-x$; $f\{f[f(x)]\} = 1-1+x = x$

EXERCISE 17. Trovare $f(x+1)$ se $f(x-1) = x^2$

Soluzione:: $f(x) = (x+1)^2$ e $f(x+1) = (x+2)^2$

EXERCISE 18. Determinare le radici positive e negative della funzione y se:

- $y = x+1$ $\begin{array}{lll} y>0 & x+1>0 & -1<x<2 \\ y<0 & x+1<0 & x<-1 \end{array}$
- $y = 2+x-x^2$ $\begin{array}{lll} y>0 & 2+x-x^2 & x>-1 \\ y<0 & 2+x-x^2<0 & x<-1 \vee x>2 \end{array}$
- $y = x^3-3x$ raccogliendo: $y = x\left(x^2-3\right)$; studiamo il segno dei due fattori e quindi quello del prodotto:
$$\begin{array}{lll} 1^\circ\, fattore & x>0 & \\ 2^\circ\, fattore & x^2-3>0 & x<-\sqrt{3} \quad \vee \quad x>\sqrt{3} \end{array}$$
il prodotto sarà $\begin{array}{ll} >0 & -\sqrt{3}<x<0 \vee x>\sqrt{3} \\ <0 & x<-\sqrt{3} \vee 0<x<\sqrt{3} \end{array}$
- $y = \log\frac{2x}{1+x}$ il logaritmo è positivo quando l'argomento è >1 e negativo quando è tra 0 e 1; studiamo pertanto la frazione che rappresenta l'argomento del logaritmo
$$\frac{2x}{1+x} > 1 \qquad \frac{x-1}{1+x} > 0$$
$$\begin{array}{ll} N>0 & x>1 \\ D>0 & x>-1 \end{array}$$
si avrà $y>0$ per $x<-1 \vee x>1$ e $y<0$ per $-1<x<1$.

EXERCISE 19. Determinare la funzione inversa di y se:

- $y = 2x+3$ con *dominio* : $(-\infty;+\infty)$ e *codominio* $= (-\infty;+\infty)$; risolvo rispetto a x: $x = \frac{y-3}{2}$ con $D = (-\infty;+\infty)$ e $C = (-\infty;+\infty)$.
- $y = x^2-1$ con $D = (-\infty;+\infty)$ e $C = [-1;+\infty)$; risolvo rispetto a x: $x = \pm\sqrt{y+1}$ con $D = [-1;+\infty)$ e $C = (-\infty;+\infty)$
- $y = \sqrt[3]{1-x^3}$ con *dominio* : $(-\infty;+\infty)$ e *codominio* $= (-\infty;+\infty)$; risolvo rispetto a x: $y^3 = 1-x^3 \Rightarrow x = \sqrt[3]{1-y^3}$ con $D = (-\infty;+\infty)$ e $C = (-\infty;+\infty)$
- $y = \log\frac{x}{2}$ con $D = (0;+\infty)$ e $C = (-\infty;+\infty)$; risolvo rispetto a x: $10^y = \frac{x}{2}$ da cui $x = 2\cdot 10^y$ con $D = (-\infty;+\infty)$ e $C = (0;+\infty)$
- $y = \arctan 3x$ con $D = (-\infty;+\infty)$; risolvo rispetto a x: $3x = \tan y$ da cui $x = \frac{1}{3}\tan y$ con $-\frac{\pi}{2} \le y \le \frac{\pi}{2}$

EXERCISE 20. Sia data la funzione
$$y = \begin{cases} x & per \quad x \le 0 \\ x^2 & per \quad x > 0 \end{cases}$$
trovarne la funzione inversa

Soluzione:: risolvendo rispetto a x si ha
$$x = \begin{cases} y & per \quad y \le 0 \\ \sqrt{y} & per \quad y > 0 \end{cases}$$

EXERCISE 21. Esprimere le funzioni date in forma di successione di uguaglianze tali che ciascun termine di questa successione sia costituito da una funzione elementare (potenza, esponenziale, trigonometrica, ecc)

(1) $y = (2x-5)^{10}$: pongo $u = 2x-5$ e ottengo $y = u^{10}$

(2) $y = 2^{\cos x}$: pongo $u = \cos x$ e ottengo $y = 2^u$
(3) $y = \lg \tan \frac{x}{2}$: pongo $u = \frac{x}{2}$ e $v = \tan u$ e ottengo $y = \lg v$
(4) $y = \arcsin\left(3^{-x^2}\right)$: pongo $u = x^2$ e $v = 3^u$ e ottengo $y = \arcsin v$

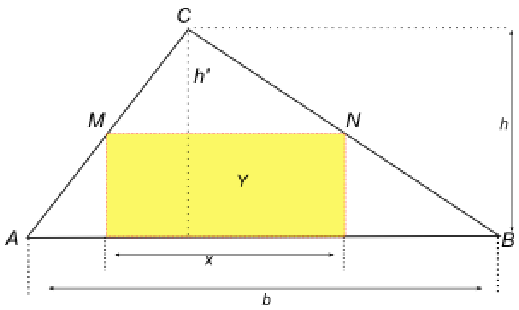
EXERCISE 22. Trascrivere le funzioni date in forma di successioni di uguaglianze con l'aiuto di una sola uguaglianza:

(1) $y = u^2$, $u = \sin x$; si ha $y = \sin^2 x$
(2) $y = \arctan u$, $u = \sqrt{v}$, $v = \lg x$; si ha $y = \arctan \lg^{\frac{1}{2}} x$
(3) $y = \begin{cases} 2u & se \quad u \le 0 \\ 0 & se \quad u > 0 \end{cases}$ e $u = x^2 - 1$; si ha $y = \begin{cases} 2\left(x^2 - 1\right) & se \quad -1 \le x \le 1 \\ 0 & se \quad x < -1 \vee x > 1 \end{cases}$

EXERCISE 23. Trovare l'espressione esplicita delle funzioni y date dalle equazioni:

(1) $x^2 - \arccos y = \pi$; si ha $\arccos y = x^2 - \pi$ da cui $y = \cos\left(x^2 - \pi\right) = \cos\left(\pi - x^2\right)$ (la funzione coseno è pari); infine $y = -\cos x^2$
(2) $x + \mid y \mid = 2y$; si ha $\begin{cases} x + y = 2y & se \quad y \ge 0 \\ x - y = 2y & se \quad y < 0 \end{cases}$ da cui si ottiene $\begin{cases} x = y & se \quad y \ge 0 \\ x = 3y & se \quad y < 0 \end{cases}$
(3) $10^x + 10^y = 10$; si ha $10^y = 10 - 10^x$ passando al logaritmo decimale si ottiene: $y = \log\left(10 - 10^x\right)$

EXERCISE 24. Un rettangolo è inscritto in un triangolo di base $b = 10$ e di altezza $h = 6$ (vedi figura). Esprimere l'area y di questo rettangolo come funzione della sua base x. Costruire il grafico di questa funzione e trovare il suo valore massimo.



Soluzione:: I due triangoli ABC e MNC sono simili, essendo le basi del rettangolo parallele.

$$b : x = h : h'$$

dove h' rappresenta l'altezza del triangolo MNC. Si ha quindi

$$h' = \frac{h}{b} x$$

L'altezza del rettangolo è pertanto

$$h - h' = h - \frac{h}{b} x = \frac{h(b - x)}{b}$$

L'area del rettangolo si può quindi esprimere

$$y = x \cdot \frac{h(b - x)}{b} = -\frac{h}{b} x^2 + hx$$

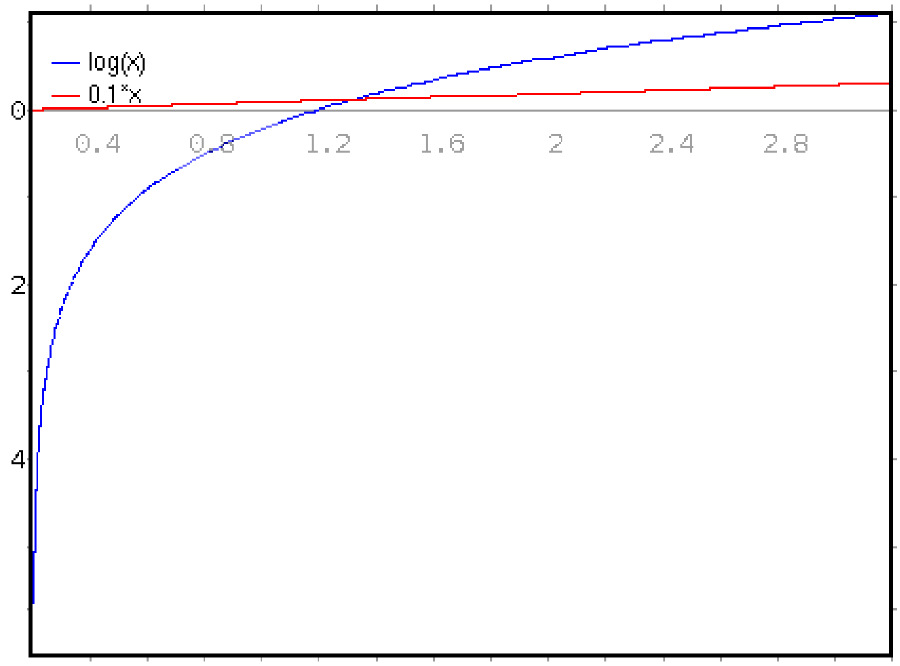
La funzione si rappresenta graficamente mediante una parabola di vertice $V\left(\frac{b}{2}; \frac{hb}{4}\right)$ e intersezioni con l'asse x nei punti $O(0;0)$ e $A(-b;0)$
Essendo la parabola rivolta verso il basso, il suo valore massimo è rappresentato dallo stesso vertice.

EXERCISE 25. Risolvi graficamente le seguenti equazioni:

- $\log x = 0,1x$: la soluzione grafica passa attraverso l'analisi della intersezione tra le due curve che rappresentano separatamente il primo e il secondo membro, cioè scindiamo l'equazione nel seguente sistema:

$$\begin{cases} y & = & \log x \\ y & = & 0,1x \end{cases}$$

in questo modo si deve rappresentare due funzioni elementari, una logaritmica di base 10 ed una retta passante per l'origine di coefficiente angolare $m = 0,1$. I due grafici sono rappresentati nella figura sottostante:

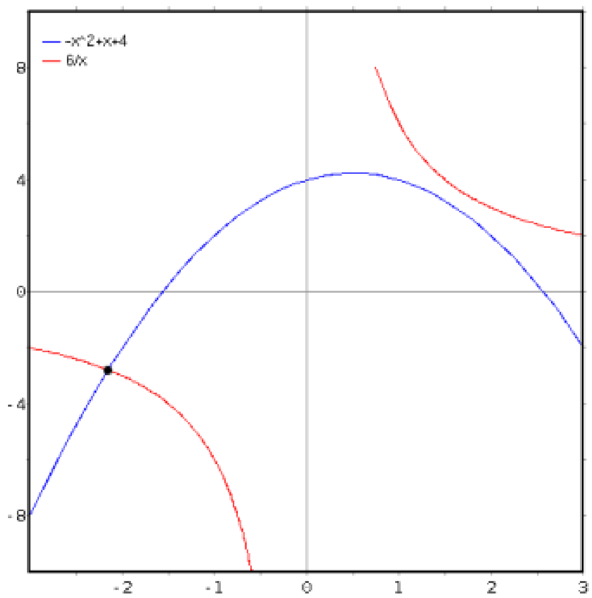


La soluzione si ha pertanto per un valore di x compreso tra $1,3$ e $1,4$.

EXERCISE 26. Risolvere graficamente il sistema di equazioni

$$\begin{cases} xy = 6 \\ x^2 - x + y = 4 \end{cases}$$

Soluzione:: la prima equazione rappresenta un'iperbole equilatera riferita ai propri assi (una classica proporzionalità inversa), la seconda equazione rappresenta la parabola $y = -x^2 + x + 4$ di vertice $V(-\frac{b}{2a} = \frac{1}{2}; -\frac{\triangle}{4a} = \frac{17}{4})$ e con concavità rivolta verso il basso (coefficiente di x^2 negativo). La soluzione è rappresentata dal punto di intersezione (evidenziato) tra le due curve, come si può osservare nella figura sottostante:

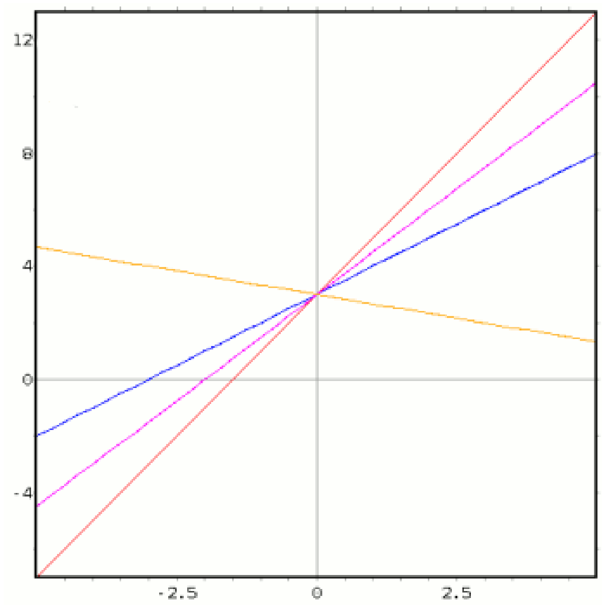


27. GRAFICI DELLE FUNZIONI ELEMENTARI

EXERCISE 28. Costruire i grafici delle funzioni lineari (rette).

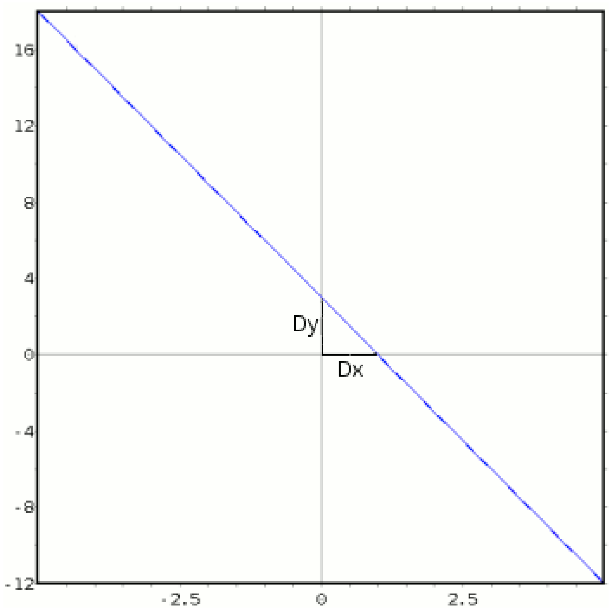
L'equazione generale di una retta nella forma esplicita è del tipo $y = mx + q$, dove m è detto coefficiente angolare e q ordinata all'origine. Questi due parametri hanno un semplice significato geometrico: q rappresenta l'ordinata del punto in cui la retta interseca l'asse y e m rappresenta il coefficiente angolare, cioè, la «pendenza» della retta e rappresenta il rapporto tra la variazione delle ordinate di due punti qualsiasi e la corrispondente variazione delle loro ascisse; in formula $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ dove x_1, x_2 sono le ascisse dei due punti e y_1, y_2 le rispettive ordinate.

La rappresentazione grafica di una retta, identificabile tramite due soli punti, è facilmente ottenibile dalla conoscenza di questi due parametri.



Assegnato ad esempio $q = 3$ si ottiene un fascio di rette passanti per il punto $Q(0;3)$; la seconda informazione sul valore di m consente di individuare in modo univoco la retta.

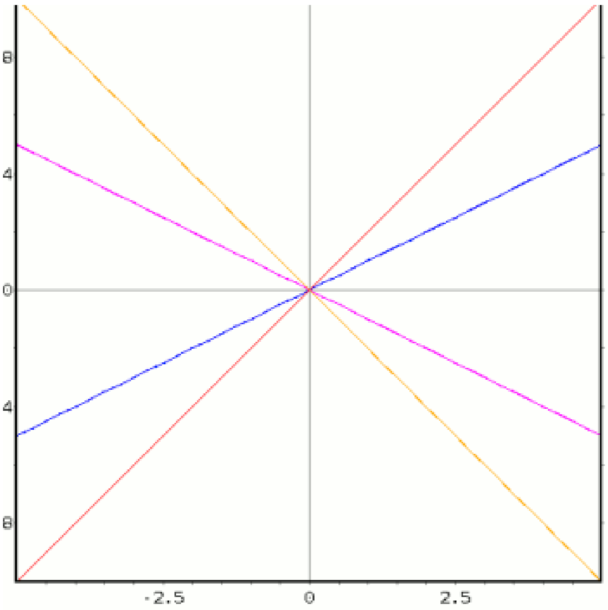
La figura sotto mostra il significato grafico di m:



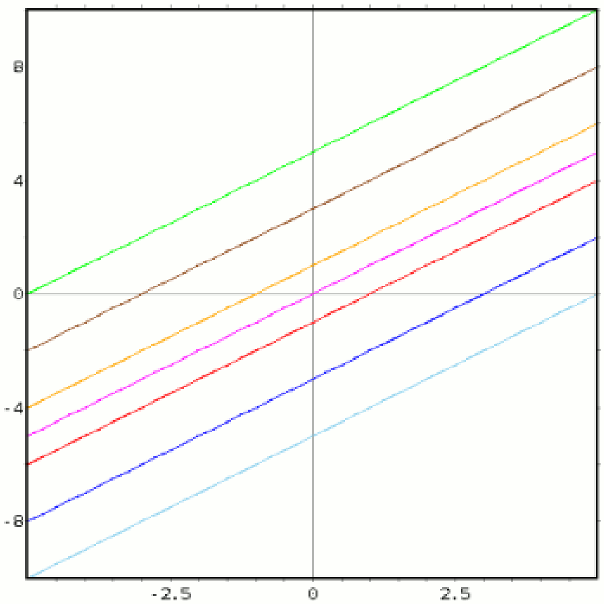
dove m è dato dal rapporto tra lo spostamento verticale per andare da un punto all'altro e quello corrispondente orizzontale. N.B: lo spostamento si intende positivo se è nei versi positivi (destra, alto), negativo nei versi negativi (sinistra, basso).
La retta del grafico avrà pertanto equazione $y = -3x + 3$.

In particolare:

(1) $y = kx$ se $k = 1, 2, -1, -2$; tutte le rette, avendo $q = 0$, passano per l'origine. Sono distinguibili solo per il diverso coefficiente angolare: maggiore è il valore, maggiore è la pendenza, se $m < 0$ la retta ha pendenza negativa

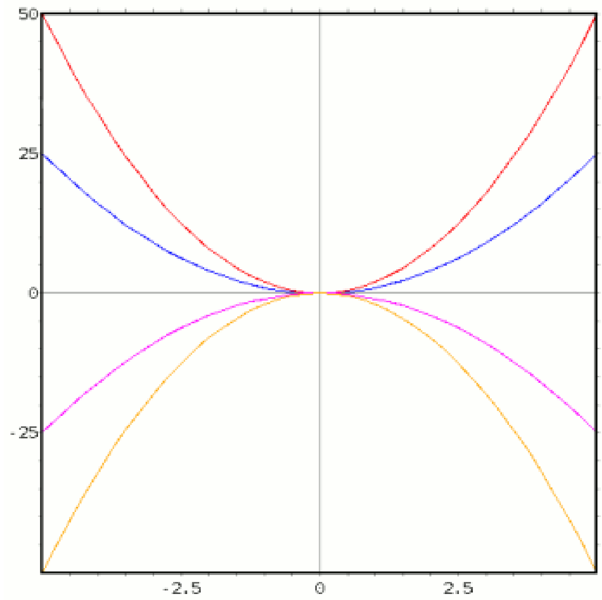


$y = x + b$ se $b = 1, 2, -1, -2$; questa equazione con parametro b identifica un fascio di rette improprie, cioè rette tra loro parallele, che hanno quindi in comune lo stesso coefficiente angolare (stessa direzione), ma intersecano l'asse y in punti distinti:

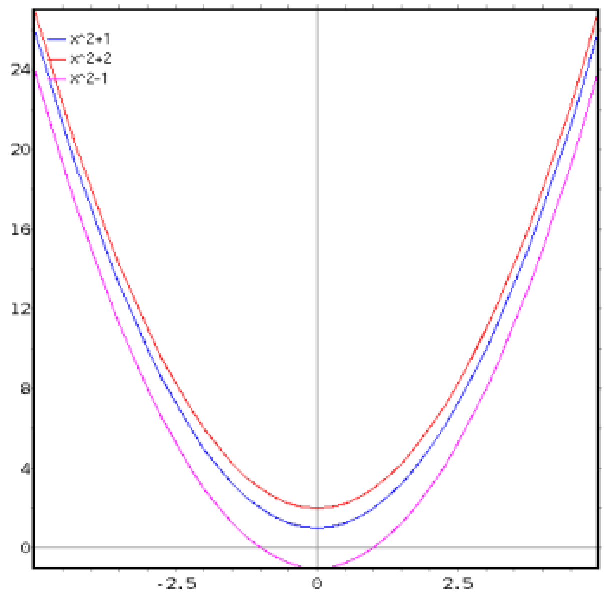


EXERCISE 29. Costruire i grafici delle funzioni razionali intere di secondo grado:

- $y = ax^2$ se $a = 1, 2, -1, -2$; questa è l'equazione di una parabola avente vertice nell'origine e asse di simmetria coincidente con l'asse delle ordinate. Il parametro a distingue le diverse concavità delle parabola, mentre le incognite x, y caratterizzano l'insieme dei punti del luogo geometrico o gli insiemi di elementi fra loro in proporzionalità quadratica

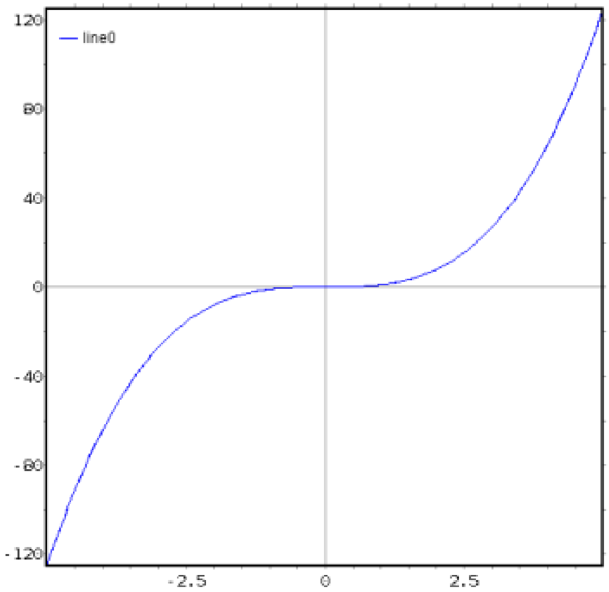


- $y = x^2 + c$ se $c = 1, 2, -1$; in questo caso si tratta di parabole traslate verticalmente, in quanto il parametro c rappresenta l'ordinata del vertice appartenente all'asse delle ordinate

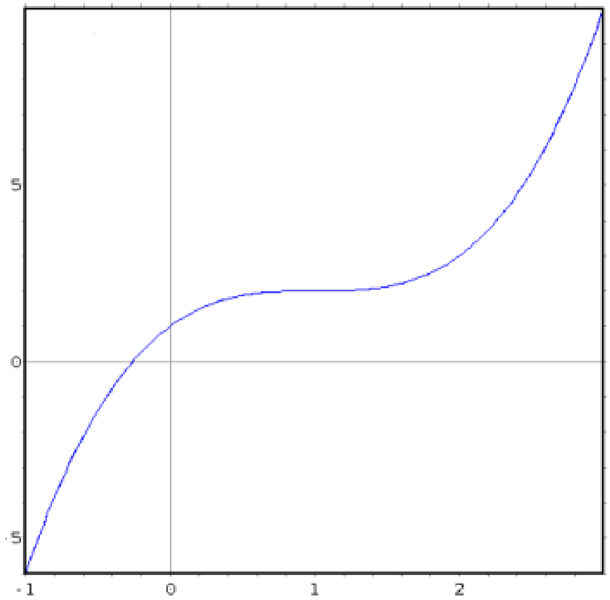


EXERCISE 30. Costruire i grafici delle funzioni razionali intere di grado superiore al secondo

$y = x^3$ (parabola cubica) funzione dispari con punto di inversione nell'origine



$y = 2 + (x-1)^3$ possiamo immaginare questa funzione come il prodotto di una traslazione orizzontale di vettore $(1,0)$ (funzione $(x-1)^3$e di un successiva traslazione verticale di vettore $(0,2)$ della funzione $y = x^3$. Il grafico mostra la funzione base e le successive traslazioni



Costruire il grafico di una funzione omografica. (specificare il significato)

31. LIMITI

Diamo prima una rapida introduzione teorica.

Limite di una funzione. Si dice che la funzione $f(x) \to A$ per $x \to a$ (dove A, a sono numeri) oppure che

$$\lim_{x\to a} f(x) = A$$

se, per ogni $\varepsilon > 0$, esiste un numero $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ (cioè dipendente da ε) tale che

$$\|f(x) - A\| < \varepsilon \quad per \quad 0 < \|x - a\| < \delta$$

Analogamente si definisce

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = A$$

se $\|f(x) - A\| < \varepsilon$ per $\|x\| > N(\varepsilon)$.

Si usa anche la notazione

$$\lim_{x\to a} f(x) = \infty$$

che significa che $\|f(x)\| > E$ per $0 < \|x - a\| < \delta(E)$, dove E è un numero arbitrario positivo.

Se i limiti $\lim_{x\to a} f_1(x)$ e $\lim_{x\to a} f_2(x)$ esistono, hanno luogo i seguenti teoremi:

(1) $\lim_{x\to a} [f_1(x) + f_2(x)] = \lim_{x\to a} f_1(x) + \lim_{x\to a} f_2(x)$

(2) $\lim_{x\to a}[f_1(x)\cdot f_2(x)] = \lim_{x\to a} f_1(x)\cdot \lim_{x\to a} f_2(x)$

(3) $\lim_{x\to a}\frac{f_1(x)}{f_2(x)} = \frac{\lim_{x\to a} f_1(x)}{\lim_{x\to a} f_2(x)}$ dove $\lim_{x\to a} f_2(x)\neq 0$

Sono di uso frequente i seguenti limiti notevoli:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = \lim_{\alpha\to 0}(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}} = e = 2.71828...$$

Risolviamo ora i seguenti esercizi:

Limiti del rapporto tra due polinomi per $x\to\infty$: si procede dividendo il numeratore e il denominatore per x^n, dove n è il grado superiore di questi due polinomi.

(1) $\lim_{x\to\infty}\frac{(x+1)^2}{x^2+1} = \lim_{x\to\infty}\frac{x^2+2x+1}{x^2+1} = \lim_{x\to\infty}\frac{x^2\left(1+\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}\right)}{x^2\left(1+\frac{1}{x^2}\right)} = 1$ in quanto i termini con x al denominatore tendono a 0 al tendere di x all'infinito.

(2) $\lim_{x\to\infty}\frac{100x}{x^2-1} = \lim_{x\to\infty}\frac{100x}{x^2\left(1-\frac{1}{x^2}\right)} = \lim_{x\to\infty}\frac{100}{x\left(1-\frac{1}{x^2}\right)} = 0$ per quanto detto per l'esercizio precedente

(3) $\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-5x+1}{3x+7} = \lim_{x\to\infty}\frac{x^2\left(1-\frac{5}{x}+\frac{1}{x^2}\right)}{x\left(3+\frac{7}{x}\right)} = \lim_{x\to\infty}\frac{x}{3} = \infty$

Una modalità analoga può essere utilizzata anche per frazioni contenenti quantità irrazionali, potendo riscrivere anche le radici sotto forma di potenze con esponente razionale.

(1) $\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2-3x-4}{\sqrt{x^4+1}} = \lim_{x\to\infty}\frac{x^2\left(2-\frac{3}{x}-\frac{4}{x^2}\right)}{\sqrt{x^4\left(1+\frac{1}{x^4}\right)}} = \lim_{x\to\infty}\frac{x^2\left(2-\frac{3}{x}-\frac{4}{x^2}\right)}{x^2\sqrt{\left(1+\frac{1}{x^4}\right)}} = 2$

(2) $\lim_{x\to\infty}\frac{2x+3}{x+\sqrt[3]{x}} = \lim_{x\to\infty}\frac{x\left(2+\frac{3}{x}\right)}{x+x^{\frac{1}{3}}} = \lim_{x\to\infty}\frac{x\left(2+\frac{3}{x}\right)}{x\left(1+\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}\right)} = 2$

(3) $\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt[3]{x^2+1}}{x+1} = \lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt[3]{x^2\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}}{\sqrt[3]{x^3\left(1+\frac{1}{x}\right)^3}} = \lim_{x\to\infty}\sqrt[3]{\frac{1}{x}} = 0$

Limiti di funzioni razionali fratte risolvibili mediante semplificazione della frazione. Cioè, ricordando il teorema di Ruffini, se

$$\lim_{x\to a}\frac{P(x)}{Q(x)}$$

se $P(a) = Q(a) = 0$, allora è utile semplificare la frazione per il polinomio $x-a$ che è un divisore comune.

(1) $\lim_{x\to -1}\frac{x^3+1}{x^2+1} = \frac{-1+1}{1+1} = 0$

(2) $\lim_{x\to 5}\frac{x^2-5x+10}{x^2-25} = \frac{10}{0} = \infty$

(3) $\lim_{x\to -1}\frac{x^2-1}{x^2+3x+2} = \lim_{x\to -1}\frac{(x-1)(x+1)}{(x+2)(x+1)} = \lim_{x\to -1}\frac{(x-1)}{(x+2)} = \frac{-2}{1} = -2$

(4) $\lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{1-x}-\frac{1}{1-x^3}\right)$ in questo caso ci troviamo in una condizione nella quale, sostituendo direttamente il valore $x=1$, dovremmo eseguire una differenza tra due infiniti, operazione non certo gestibile secondo le modalità consuete.
In tal caso sommeremo le due frazioni

$$\lim_{x\to 1}\frac{1+x+x^2-1}{1-x^3} = \lim_{x\to 1}\frac{x+x^2}{1-x^3} = \frac{2}{0} = \infty$$

Le espressioni che contengono quantità irrazionali, si possono ridurre, in molti casi, a espressioni razionali mediante l'introduzione di una nuova variabile ausiliaria.

(1) $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-1}{\sqrt[3]{1+x}-1}$ le due radici hanno indice diverso, ma si possono ridurre allo stesso indice 6, applicando le proprietà delle radici, ottenendo $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[6]{(1+x)^3}-1}{\sqrt[6]{(1+x)^2}-1}$, ponendo $y^6 = 1+x$, e quindi per $x\to 0$ si ha $y\to 1$

$$\lim_{y\to 1}\frac{y^3-1}{y^2-1} = \lim_{y\to 1}\frac{(y-1)\left(y^2+y+1\right)}{(y-1)(y+1)} = \lim_{y\to 1}\frac{y^2+y+1}{y+1} = \frac{3}{2}$$

(2) $\lim_{x\to1}\frac{\sqrt{x}-1}{x-1}$ ponendo $x=y^2$ (se $x\to1$ allora $y\to1$) si ha

$$\lim_{y\to1}\frac{y-1}{y^2-1}=\lim_{y\to1}\frac{y-1}{(y-1)(y+1)}=\lim_{y\to1}\frac{1}{y+1}=\frac{1}{2}$$

questo limite si poteva anche calcolare così

$$\lim_{x\to1}\frac{\sqrt{x}-1}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{\sqrt{x}-1}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}=\lim_{x\to1}\frac{1}{\sqrt{x}+1}=\frac{1}{2}$$

(3) $\lim_{x\to64}\frac{\sqrt{x}-8}{\sqrt[3]{x}-4}$ ponendo $x=y^6$ si ha

$$\lim_{y\to2}\frac{y^3-8}{y^2-4}=\lim_{y\to2}\frac{(y-2)\left(y^2+2y+4\right)}{(y-2)(y+2)}=\lim_{y\to2}\frac{y^2+2y+4}{y+2}=3$$

(4) $\lim_{x\to1}\frac{\sqrt[3]{x^2}-2\sqrt[3]{x}+1}{(x-1)^2}=\lim_{x\to1}\frac{\left(\sqrt[3]{x}-1\right)^2}{\left(\sqrt[3]{x}-1\right)^2\left(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1\right)^2}=\lim_{x\to1}\frac{1}{\left(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1\right)^2}=\frac{1}{9}$

Un altro procedimento per determinare il limite di un'espressione irrazionale consiste nel razionalizzare il numeratore o il denominatore la quantità irrazionale.

(1) $\lim_{x\to7}\frac{2-\sqrt{x-3}}{x^2-49}$ razionalizziamo il numeratore moltiplicando per $\left(2+\sqrt{x-3}\right)$

$$\lim_{x\to7}\frac{\left(2-\sqrt{x-3}\right)\left(2+\sqrt{x-3}\right)}{(x^2-49)\left(2+\sqrt{x-3}\right)}=\lim_{x\to7}\frac{4-x+3}{(x^2-49)\left(2+\sqrt{x-3}\right)}=\lim_{x\to7}\frac{-(x-7)}{(x-7)(x+7)\left(2+\sqrt{x-3}\right)}=\lim_{x\to7}\frac{-1}{(x+7)\left(2+\sqrt{x-3}\right)}=-\frac{1}{56}$$

32. Gruppo 1

EXERCISE 33. Determinare quale curva si ottiene se nell'equazione

$$x^2+lxy-(l+1)y^2+3ly-1=0$$

si pone:
a) $l=0$
b) $l=-1$
c) $l=1$ **NOTA INTRODUTTIVA TEORICA**

Premettiamo alla soluzione di questo esercizio, una breve trattazione del riconoscimento di una conica.
Data una equazione di 2° grado del tipo

$$Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0$$

essa rappresenta l'espressione analitica di una generica conica in forma cartesiana. Una generica rototraslazione degli assi cartesiani la trasforma in una analoga equazione

$$A_1X^2+B_1XY+C_1Y^2+D_1X+E_1Y+F_1=0$$

Senza specificare i calcoli necessari, la rototraslazione lascia invariate le espressioni seguenti relative ai coefficienti

$$I_l=A+C \quad I_q=\begin{vmatrix} A & \frac{B}{2} \\ \frac{B}{2} & C \end{vmatrix} \quad I_c=\begin{vmatrix} A & \frac{B}{2} & \frac{D}{2} \\ \frac{B}{2} & C & \frac{E}{2} \\ \frac{D}{2} & \frac{E}{2} & F \end{vmatrix}$$

dove I_l è detto *invariante lineare*; I_q è detto *invariante quadratico*; I_c è detto *invariante cubico*.

Tali invarianti possono essere utilizzati come discriminanti dei vari tipi di conica al variare dei coefficienti A,B,C,D,E,F. In particolare

$I_c\neq0$ per le coniche non sono degeneri o irriducibili
- $I_q>0$ per l'ellisse
- $I_q<0$ per l'iperbole
- $I_q=0$ per la parabola

$I_c=0$ per le coniche degeneri o riducibili in due rette
$I_l\neq0$ in ogni caso (da noi trattato)

Una volta individuata la conica, supposto che abbia assi e centro di simmetria, è possibile ricondurla a forma canonica individuante la rototraslazione che è stata applicata. Senza mostrarne i calcoli, si ha che l'angolo di rotazione è ottenibile da

$$\tan2\alpha=\frac{B}{A-C} \quad da\,cui \quad \alpha=\frac{1}{2}\arctan\frac{B}{A-C}$$

il vettore della traslazione è invece ottenibile dalle seguenti relazioni

$$a=\frac{EB-2CD}{4AC-B^2} \qquad b=\frac{BD-2AE}{4AC-B^2}$$

per cui l'equazione di rototraslazione sarà

$$\begin{cases} x &= X\cos\left(\frac{1}{2}\arctan\frac{B}{A-C}\right) - Y\sin\left(\frac{1}{2}\arctan\frac{B}{A-C}\right) + \frac{EB-2CD}{4AC-B^2} \\ y &= X\sin\left(\frac{1}{2}\arctan\frac{B}{A-C}\right) + Y\cos\left(\frac{1}{2}\arctan\frac{B}{A-C}\right) + \frac{BD-2AE}{4AC-B^2} \end{cases}$$

Caso: a): sostituendo $l = 0$, si ottiene

$$x^2 - y^2 - 1 = 0$$

cioè

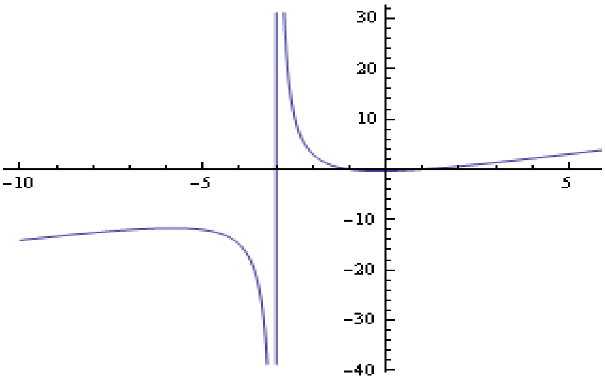
$$x^2 - y^2 = 1$$

una iperbole equilatera (ricordare l'equazione dell'iperbole con assi paralleli agli assi cartesiani $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$) essendo $a = b$.

Caso: b): sostituendo $l = -1$, si ottiene

$$x^2 - xy - 3y - 1 = 0$$

determiniamo il tipo di conica attraverso lo schema presentato.



Cominciamo col verificare se la conica è degenere:

$$I_c = \begin{vmatrix} A & \frac{B}{2} & \frac{D}{2} \\ \frac{B}{2} & C & \frac{E}{2} \\ \frac{D}{2} & \frac{E}{2} & F \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & \frac{-1}{2} & 0 \\ \frac{-1}{2} & 0 & \frac{-3}{2} \\ 0 & \frac{-3}{2} & -1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0$$

la conica è quindi non degenere. Calcoliamo ora

$$I_q = \begin{vmatrix} 1 & \frac{-1}{2} \\ \frac{-1}{2} & 0 \end{vmatrix} = 1 \cdot 0 - \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{4} < 0$$

è quindi un'**iperbole**.

Trasformiamo ora l'equazione in forma canonica. Dalla nota teorica, essendo $A = 1$, $B = -1$, $C = 0$, $D = 0$, $E = -3$ e $F = -1$, si ha

$$\tan 2\alpha = -1 \qquad \alpha = \frac{3}{8}\pi \ (67.5^\circ)$$
$$a = -3 \qquad b = -6$$

(in questo caso $\sin\frac{3}{8}\pi = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$ e il $\cos\frac{3}{8}\pi = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$), per cui eseguendo la sostituzione

$$\begin{cases} x &= X\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2} - Y\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2} - 3 \\ y &= X\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2} + Y\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2} - 6 \end{cases}$$

si ottiene

$$\left(X\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2} - Y\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2} - 3\right)^2 - \left(X\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2} - Y\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2} - 3\right)\left(X\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2} + Y\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2} - 6\right) +$$
$$-3\left(X\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2} + Y\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2} - 6\right) - 1 = 0$$

e svolgendo si ha

$$\frac{(2-\sqrt{2})}{4}X^2 + \frac{(2+\sqrt{2})}{4}Y^2 + 9 - \frac{\sqrt{2}}{2}XY - 3\sqrt{2-\sqrt{2}}X + 3\sqrt{2+\sqrt{2}}Y +$$
$$-\frac{\sqrt{2}}{4}X^2 - \frac{2-\sqrt{2}}{4}XY + 3\sqrt{2-\sqrt{2}}X + \frac{2+\sqrt{2}}{4}XY + \frac{\sqrt{2}}{4}Y^2 - 3\sqrt{2+\sqrt{2}}Y +$$
$$+\frac{3\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}X + \frac{3\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}Y - 18 - \frac{3\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}X - \frac{3\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}Y + 18 - 1 = 0$$

Sommando i termini simili, si ottiene

$$\frac{1-\sqrt{2}}{2}X^2+\frac{1+\sqrt{2}}{2}Y^2+8=0$$

dividiamo tutti i termini per 8

$$\frac{1-\sqrt{2}}{16}X^2+\frac{1+\sqrt{2}}{16}Y^2+1=0$$

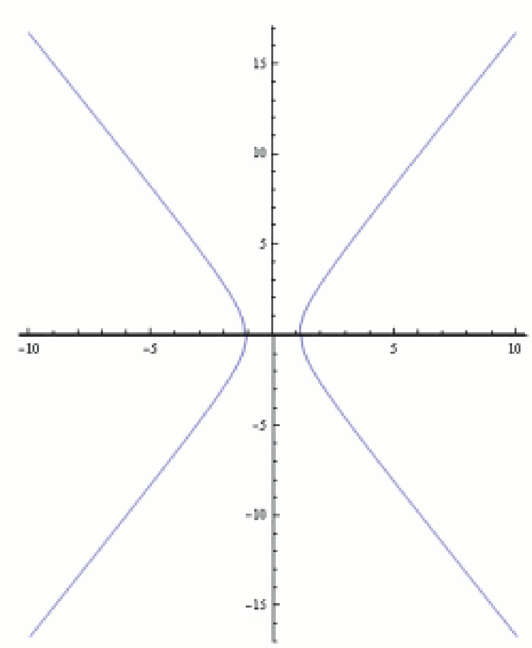
Riaggiustiamo i coefficienti

$$\frac{X^2}{\frac{16}{1-\sqrt{2}}}+\frac{Y^2}{\frac{16}{1+\sqrt{2}}}=-1$$

oppure, essendo $1-\sqrt{2}=-\left(\sqrt{2}-1\right)<0$, si ottiene dopo aver anche razionalizzato i coefficienti numerici,

$$\frac{X^2}{16\left(1+\sqrt{2}\right)}-\frac{Y^2}{16\left(\sqrt{2}-1\right)}=1$$

Questa è l'equazione cercata dell'iperbole ridotta a forma normale il cui grafico è



Caso: (c): con $l=1$ si ottiene $x^2+xy-2y^2+3y-1=0$.

Ripetiamo la procedura precedente, calcolando gli invarianti:

$$I_c=\begin{vmatrix} A & \frac{B}{2} & \frac{D}{2} \\ \frac{B}{2} & C & \frac{E}{2} \\ \frac{D}{2} & \frac{E}{2} & F \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & -2 & \frac{3}{2} \\ 0 & \frac{3}{2} & -1 \end{vmatrix}=0$$

questa è pertanto una conica degenere riconducibile a due rette.

Le due rette avranno come equazioni due polinomi che moltiplicati danno l'equazione della conica degenere. Per ricavarle, risolviamo l'equazione sopra, considerando la x come variabile:

$$x_{1,2}=\frac{-y\pm\sqrt{y^2+8y^2-12y+4}}{2}=\quad\frac{-y\pm\sqrt{(3y-2)^2}}{2}=$$

$$x_1=\frac{2y-2}{2}=y-1\quad x_2=\frac{2y-2}{2}=1-2y$$

le due rette sono quindi $x-y+1=0$ e $x+2y-1=0$ e la conica può essere pertanto espressa nella forma $(x-y+1)(x+2y-1)=0$.

EXERCISE 34. Dopo aver verificato che

$$\sin^3 x\cdot\cos^3 x=\frac{3}{32}\sin 2x-\frac{1}{32}\cos 6x$$

rispondere ai seguenti quesiti:

(1) calcolare

$$\sin^3\frac{\pi}{12}\cos^3\frac{\pi}{12}$$

(2) calcolare

$$\int_{\frac{\pi}{12}}^{\frac{\pi}{3}} \sin^3 x \cdot \cos^3 x\, dx$$

Verifichiamo: attraverso le formule goniometriche che

$$\sin^3 x \cdot \cos^3 x = \frac{3}{32}\sin 2x - \frac{1}{32}\cos 6x$$

Innanzitutto riscriviamo il primo membro

$$\sin^3 x \cdot \cos^3 x = \sin^2 x \cdot \sin x \cdot \cos^2 x \cdot \cos x$$

applichiamo la formula di bisezione ($\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}$ e $\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}$) e la formula di duplicazione ($\sin x \cdot \cos x = \frac{\sin 2x}{2}$), da cui

$$\begin{aligned}
\sin^2 x \cdot \sin x \cdot \cos^2 x \cdot \cos x &= \frac{1-\cos 2x}{2} \cdot \frac{1+\cos 2x}{2} \cdot \frac{\sin 2x}{2} = \\
&= \frac{1-\cos^2 2x}{4} \cdot \frac{\sin 2x}{2} = \\
&= \frac{\sin 2x}{8} - \frac{\sin 2x \cdot \cos^2 2x}{2} = \\
&= \frac{\sin 2x}{8} - \frac{\sin 2x}{8} \cdot \frac{1+\cos 4x}{2} = \\
&= \frac{\sin 2x}{16} - \frac{\sin 2x \cdot \cos 4x}{16} = \\
&= \frac{\sin 2x}{16} - \frac{1}{16}\left(\frac{\sin 6x - \sin 2x}{2}\right) = \\
&= \frac{3}{32}\sin 2x - \frac{1}{32}\sin 6x
\end{aligned}$$

c.v.d.

Caso: 1: calcolare $\sin^3 \frac{\pi}{12} \cos^3 \frac{\pi}{12}$. Applicando quanto visto sopra è evidente che $\sin^3 \frac{\pi}{12} \cos^3 \frac{\pi}{12} = \frac{3}{32}\sin 2\frac{\pi}{12} - \frac{1}{32}\sin 6\frac{\pi}{12} = \frac{3}{32}\sin\frac{\pi}{6} - \frac{1}{32}\sin\frac{\pi}{2} = \frac{3}{32}\cdot\frac{1}{2} - 0 = \frac{1}{64}$

Caso: 2: calcolare $\int_{\frac{\pi}{12}}^{\frac{\pi}{3}} \sin^3 x \cdot \cos^3 x\, dx$. Anche qui possiamo passare a

$$\begin{aligned}
\int_{\frac{\pi}{12}}^{\frac{\pi}{3}} \left(\frac{3}{32}\sin 2x - \frac{1}{32}\sin 6x\right) dx &= -\frac{3}{64}\cos 2x + \frac{1}{192}\cos 6x \,\Big|_{\frac{\pi}{12}}^{\frac{\pi}{3}} = \\
&= -\frac{3}{64}\cos\frac{2\pi}{3} + \frac{1}{192}\cos 2\pi + \frac{3}{64}\cos\frac{\pi}{6} - \frac{1}{192}\cos\frac{\pi}{2} = \\
&= \frac{3}{128} + \frac{1}{192} + \frac{3\sqrt{3}}{128} = \\
&= \frac{11+9\sqrt{3}}{384}
\end{aligned}$$

EXERCISE 35. Determinare per quali valori di a le formule

$$\begin{cases} x' = ax - 2y \\ y' = -x + (a-1)y \end{cases}$$

rappresentano

(1) una affinità
(2) una affinità che trasformi un triangolo T in un triangolo T' tale che

$$Area\left(T'\right) = 4\,area\,(T)$$

Caso: (1): assegnata una trasformazione

$$(A)\begin{cases} x' = a_1 x + b_1 y + c_1 \\ y' = a_2 x + b_2 y + c_2 \end{cases}$$

questa rappresenta una affinità se

$$Det\,(A) = a_1 \cdot b_2 - a_2 \cdot b_1 \neq 0$$

se $D > 0$ l'affinità è diretta, se $D < 0$ l'affinità è inversa. Imporre $D \neq 0$ significa richiedere che la trasformazione sia invertibile e che quindi sia una funzione biunivoca di punti nel piano.
Nel nostro caso si avrà

$$Det\,(A) = a \cdot (a-1) + 1 \cdot (-2) = a^2 - a - 2 \neq 0$$

per

$$a \neq 2 \qquad a \neq -1$$

Caso: (2): L'affinità trasforma rette in rette; a rette parallele e/o corrispondono rette parallele e/o incidenti; conserva il rapporto fra segmenti paralleli. In generale un'affinità non conserva la forma delle figure. Per quanto riguarda l'area delle figure si ha

$$A\left(S^{'}\right) = |Det\,(A)|\,A\,(S)$$

basterà quindi che

$$|Det\,(A)| = 4$$

cioè

$$a^2 - a - 2 = 4 \qquad a^2 - a - 6 = 0$$
$$a = 3 \qquad a = -2$$

EXERCISE 36. Sia f una funzione due volte derivabile con derivata seconda continua in un intorno I di $x_0 = 0$. Sapendo che: $f(0) = f^{'}(0) = 0$, $f^{''}(0) = 4$, calcolare il

$$\lim_{x \to 0} \frac{f\,(x)}{x^2}$$

Soluzione:: il quesito si risolve applicando il teorema dell'Hopital; ciò è intuibile dai dati che offrono i valori della derivata prima e seconda della funzione per $x = 0$.

$$\lim_{x \to 0} \frac{f\,(x)}{x^2} = \quad \lim_{x \to 0} \frac{f^{'}(x)}{2x} = \quad \lim_{x \to 0} \frac{f^{''}(x)}{2} = \frac{4}{2} = 2$$

EXERCISE 37. Sia $f(x)$ una funzione continua in $[a;b]$.

(1) Qual è la derivata di $\int_a^x f\,(t)\,dt$ rispetto a x?
(2) Qual è la derivata di $\int_x^a f\,(t)\,dt$ e di $\int_a^{x^2} f\,(t)\,dt$ rispetto a x?

Soluzione::

(1) L'integrale definito è un numero e, una volta considerata la funzione f e l'intervallo $[a;b]$ di integrazione, non ha alcuna importanza il nome della variabile indipendente:

$$\int_a^b f\,(x)\,dx = \int_a^b f\,(t)\,dt$$

Inoltre, ad ogni $x \in [a;b]$ corrisponde uno e un solo numero dato, cioè

$$F\,(x) = \int_a^x f\,(t)\,dt$$

dove $F\,(x)$ è detta la funzione integrale della $f\,(x)$, che è invece la funzione da integrare.
Applicando il teorema di Torricelli-Barrow, per il quale, assegnata $f\,(x)$ continua in $[a;b]$, si ha

$$F\,(x) = \int_a^x f\,(t)\,dt$$

che è pure derivabile $\vee x \in [a;b]$ e risulta

$$F^{'}(x) = f(x) \qquad F(a) = 0$$

si ha

$$\frac{d}{dx}\left(\int_a^x f\,(t)\,dt\right) = \frac{d}{dx}\left(F(x) - F(a)\right) = F^{'}(x) = f(x)$$

(2) Poiché $\int_a^x f\,(t)\,dt = -\int_x^a f\,(t)\,dt$, la derivata di $\int_x^a f\,(t)\,dt$ è uguale a $-f(x)$.
Infine, $\frac{d}{dx}\left(\int_a^{x^2} f\,(t)\,dt\right) = \frac{d}{dx}\left(F(x^2) - F(a)\right) = 2xF^{'}(x^2) = 2xf(x^2)$

38. GRUPPO 2

EXERCISE 39. Nel sistema xOy la retta r ha coefficiente angolare $m=-\sqrt{3}$. Determinare il coefficiente angolare di r rispetto al sistema XOY ruotato in senso antiorario di $\frac{\pi}{4}$ rispetto al sistema xOy.

Soluzione:: Per risolvere, basta ricordare le equazioni che descrivono una rotazione degli assi cartesiani, con $\alpha=\frac{\pi}{4}$:

$$\begin{cases} x & = & X\cos\frac{\pi}{4}-Y\sin\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}(X-Y) \\ y & = & X\sin\frac{\pi}{4}+Y\cos\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}(X+Y) \end{cases}$$

L'equazione della retta sarà del tipo $y=-\sqrt{3}x+q$. Sostituendo, si ottiene:

$$\frac{\sqrt{2}}{2}(X+Y)=-\sqrt{3}\frac{\sqrt{2}}{2}(X-Y)+q$$

svolgendo si ottiene

$$Y\left(\sqrt{2}-\sqrt{6}\right)=-X\left(\sqrt{2}+\sqrt{6}\right)+2q$$

Essa può essere ricondotta ad un'equazione del tipo $Y=mX+k$, dove m è il coefficiente angolare, dividendo per $\left(\sqrt{2}-\sqrt{6}\right)$. Ne segue che il coefficiente angolare nel sistema ruotato sarà:

$$m=\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{\sqrt{6}-\sqrt{2}}=\frac{8+4\sqrt{3}}{4}=2+\sqrt{3}$$

EXERCISE 40. Nella simmetria di centro C al punto $A(3;2)$ corrisponde il punto $A^{'}(5;7)$; qual è l'equazione della trasformata $\gamma^{'}$ della parabola γ di equazione $y=x^2-4$?

Soluzione:: Basta applicare le formule di trasformazione per una simmetria centrale di punto P. É possibile ottenere lo stesso risultato, ricordando il significato e le modalità di costruzione di una tale simmetria.
In essa, i punto di simmetria è il punto medio della congiungente di un punto qualsiasi con il suo trasformato. Determiniamo quindi il centro di simmetria P attraverso le formule che determinano il punto medio di un segmento, noti i suoi estremi

$$\begin{array}{rcl} x_P & = & \frac{x_A+x_{A'}}{2}=4 \\ y_P & = & \frac{y_A+y_{A'}}{2}=\frac{9}{2} \end{array}$$

segue che, generalizzando rispetto a tutti i punti delle parabole, cioè indicando con X i punti della parabola trasformati,

$$\begin{array}{rcl} x & = & 2x_P-X \\ y & = & 2y_P-Y \end{array}$$

Sostituisco tali relazioni nella equazione della parabola data

$$9-Y=(8-X)^2-4$$

svolgendo ed esplicitando rispetto a Y si ha:

$$Y=-X^2+16X-51$$

EXERCISE 41. Se $\{a_n\}=\left\{\log\left(1-\frac{1}{n}\right)\right\}$ con $n\geq 2$, verificare che $\sum_{k=2}^{100}a_k=-2$

Soluzione:: calcoliamo la sommatoria sostituendo $k=2,3,4,...$ Si ottiene

$$\log\frac{1}{2}+\log\frac{2}{3}+\log\frac{3}{4}+...+\log\frac{99}{100}$$

Applicando la proprietà dei logaritmi per cui $\log\frac{a}{b}=\log a-\log b$, si può riscrivere, sapendo che $\log 1=0$,

$$-\log 2+\log 2-\log 3+\log 3-\log 4+...-\log 99+\log 99-\log 100$$

si può osservare che il denominatore dell'argomento di ogni logaritmo è uguale al numeratore dell'argomento del logaritmo successivo, ed essendo $\log 1=0$, rimane soltanto

$$-\log 100=-\log 10^2=-2$$

EXERCISE 42. Determinare a, c in modo che la funzione

$$f(x) = \begin{matrix} ax^2+c & \forall x \le 1 \\ x^3-x^2 & \forall x > 1 \end{matrix}$$

sia continua e derivabile $\forall \in \mathbb{R}$.

Soluzione:: imponiamo la condizione di continuità per $x \to 1$, si ha

$$\lim_{x\to 1} ax^2+c = a+c \qquad \lim_{x\to 1} x^3-x^2 = 0$$

da cui deriva che

$$a+c=0$$

Imponiamo ora la condizione di derivabilità, sapendo che le derivate nei due intervalli sono rispettivamente $f^{'}(x) = 2ax$ e $f^{'}(x) = 3x^2-2x$

$$\lim_{x\to 1} 2ax = 2a \qquad \lim_{x\to 1} 3x^2-2x = 1$$

da cui deriva

$$a = \frac{1}{2}$$

e sostituendo nella relazione precedente, si trova anche il valore di c,

$$c = -\frac{1}{2}$$

EXERCISE 43. Calcolare il valore medio della funzione

$$f(x) = \tan 2x$$

nell'intervallo $\left[0; \frac{\pi}{6}\right]$.

Soluzione:: la soluzione si basa sulla conoscenza del teorema della media per gli integrali definiti: Se $f(x)$ è una funzione continua nell'intervallo $[a;b]$, esiste almeno un punto $c \in [a;b]$ tale che:

$$f(c) = \frac{\int_a^b f(x)\,dx}{b-a}$$

Il valore $f(c)$ è detto valor medio di $f(x)$ nell'intervallo $[a;b]$.
La funzione assegnata è sicuramente continua nell'intervallo stabilito, per cui esiste

$$f(c) = \frac{\int_0^{\frac{\pi}{6}} \tan 2x\,dx}{\frac{\pi}{6}}$$

Calcoliamo l'integrale

$$\int_0^{\frac{\pi}{6}} \tan 2x\,dx = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{6}} \tan 2x\,d(2x) = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{\sin 2x}{\cos 2x}\,d(2x) =$$
$$= -\frac{1}{2}\ln(\cos 2x)\,|_0^{\frac{\pi}{6}} = -\frac{1}{2}\left(\ln\frac{1}{2} - \ln 1\right) = \frac{\ln 2}{2}$$

Calcoliamo ora la media

$$f(c) = \frac{\frac{\ln 2}{2}}{\frac{\pi}{6}} = \frac{3\ln 2}{\pi}$$

EXERCISE 44. Dimostrare che:

$$\binom{n}{k-1} + 2\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+2}{k+1}$$

Soluzione:: $\binom{n}{k}$ è detto coefficiente binomiale ed è definita da

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$$

dove $n!$ è detto $n-fattoriale = n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot(n-3)\ldots\cdot 2\cdot 1$.
Applicando tali definizioni, la dimostrazione è alquanto laborioso. Risulta invece, in questo caso assai più conveniente, ricordare la seguente proprietà dei coefficienti binomiali

$$\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k+1} + \binom{n}{k}$$

che applicata al secondo membro, lo trasforma in

$$\binom{n+2}{k+1} = \binom{n+1}{k+1} + \binom{n+1}{k}$$

e applicandola una seconda volta, si ha

$$\binom{n+2}{k+1} = \binom{n}{k+1} + \binom{n}{k} + \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}$$

sommando i termini simili, si ottiene facilmente

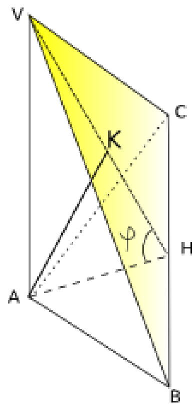
$$\binom{n+2}{k+1} = \binom{n}{k+1} + 2\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}$$

che, come si può vedere, è identica al primo membro.

45. Gruppo 3

EXERCISE 46. Nel piano α è dato il triangolo ABC rettangolo in A e tale che $\overline{AB} = 1$ e $\sin A\hat{B}C = \frac{2\sqrt{5}}{5}$. Sulla retta per A perpendicolare al piano α considerare il punto V tale che il piano π dei punti V, B, C formi con α un angolo φ tale che $\tan\varphi = 2$. Determinare:

(1) superficie e volume della piramide di base ABC e altezza VA;
(2) la distanza $\overline{AK}$ del punto A dal piano π.



Soluzione::

(1) Cominciamo con il risolvere il triangolo di base ABC, rettangolo in A, di cui si conosce un angolo e un cateto. Applicando il teorema sui triangoli rettangoli, si ha

$$\frac{AC}{AB} = \tan ABC$$

calcoliamo quindi la tangente dell'angolo indicato. Dalla relazione fondamentale della goniometria ($\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$), otteniamo, sapendo che gli angoli in questione sono tutti acuti,

$$\cos ABC = +\sqrt{1 - \frac{4}{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5}$$

da cui

$$\tan ABC = \frac{2\sqrt{5}}{5} \cdot \frac{\sqrt{5}}{5} = 2$$

si ricava che tale angolo è uguale all'angolo φ.
Avremo perciò

$$AC = 2AB = 2$$

L'ipotenusa del triangolo di base sarà, anche per il th. di Pitagora,

$$BC = \sqrt{5}$$

Calcoliamo ora l'altezza AH relativa alla ipotenusa BC, che forma con VH un angolo φ, mediante la formula inversa dell'area del triangolo di base:

$$AH = \frac{AB \cdot AC}{BC} = \frac{2}{\sqrt{5}}$$

mentre l'area del triangolo ABC sarà

$$A_{ABC} = \frac{2 \cdot 1}{2} = 1$$

Per determinare l'altezza VA è necessario conoscere prima l'altezza VH del triangolo VBC:

$$\frac{VA}{AH} = \tan\varphi = 2$$

da cui

$$VA = 2$$

Da qui, ricordando che abbiamo dedotto dal calcolo $\varphi = \angle ABC$

$$VH = \frac{AH}{\cos\varphi} = \frac{2\sqrt{5}}{5} \cdot \frac{5}{\sqrt{5}} = 2$$

Calcoliamo ora il volume e la superficie della piramide:

$$V = \frac{A_{ABC} \cdot AV}{3} = \frac{1}{3} \cdot \frac{4\sqrt{5}}{5} = \frac{4\sqrt{5}}{15}$$

la superficie sarà data dalla somma delle aree dei quattro diversi triangoli che formano la piramide, cioè

$$S = A_{BAV} + A_{CAV} + A_{BVC} + A_{ABC} = \frac{4\sqrt{5}}{10} + \frac{8\sqrt{5}}{10} + \sqrt{5} + 1 = \frac{11\sqrt{5}+5}{5}$$

(2) Si può osservare dalla figura che la distanza AK richiesta è l'altezza relativa all'ipotenusa del triangolo rettangolo AHV, (questo perché se AV è perpendicolare al piano contenente il triangolo ABC è perpendicolare a tutte le rette uscenti da A e appartenenti al piano in questione) per cui

$$AK = \frac{AH \cdot AV}{VH} = \frac{\frac{2\sqrt{5}}{5} \cdot \frac{4\sqrt{5}}{5}}{2} = \frac{4}{5}$$

EXERCISE 47. Sapendo che nel triangolo ABC si ha $\overline{BC} = 10$, $\cos\hat{A} = \frac{4}{5}$, $\cos\hat{B} = \frac{7}{25}$, quanto misurano AC e AB?

Soluzione:: questo esercizio è una applicazione del teorema dei seni che stabilisce una relazione di proporzionalità tra la lunghezza dei lati e i rispettivi seni degli angoli opposti, cioè

$$\frac{AB}{\sin\hat{C}} = \frac{AC}{\sin\hat{B}} = \frac{BC}{\sin\hat{A}}$$

Prima di applicare tale relazione è necessario conoscere anche il valore del seno degli angoli assegnati:

$$\begin{aligned} \sin\hat{A} &= \sqrt{1 - \frac{16}{25}} = \frac{3}{5} \\ \sin\hat{B} &= \sqrt{1 - \frac{49}{625}} = \frac{24}{25} \end{aligned}$$

(in questo calcolo consideriamo solo il segno positivo davanti alla radice, poiché, essendo il coseno positivo, l'angolo appartiene al primo quadrante, dove anche il seno è positivo)
Calcoliamo ora i lati incogniti, applicando il teorema dei seni

$$\overline{AC} = \frac{\overline{BC}\sin\hat{B}}{\sin\hat{A}} = \frac{10 \cdot \frac{24}{25}}{\frac{3}{5}} = 16$$

per calcolare AB è necessario conoscere il seno del suo angolo opposto, quindi

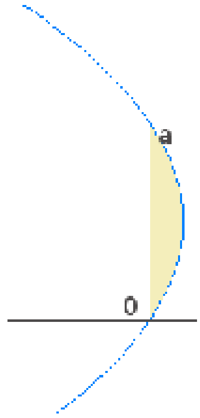
$$\begin{aligned} \sin\hat{C} &= \sin\left(\pi - \left(\hat{A} + \hat{B}\right)\right) = \sin\left(\hat{A} + \hat{B}\right) = \\ &= \sin\hat{A}\cos\hat{B} \cdot \sin\hat{B}\cos\hat{A} = \\ &= \frac{3}{5} \cdot \frac{7}{25} + \frac{24}{25} \cdot \frac{4}{5} = \frac{117}{125} \end{aligned}$$

da cui

$$\overline{AB} = \frac{\overline{BC}\sin\hat{C}}{\sin\hat{A}} = \frac{10 \cdot \frac{117}{125}}{\frac{3}{5}} = \frac{78}{5}$$

EXERCISE 48. Quale valore di deve dare ad a affinché il segmento parabolico delimitato dalla parabola $x = ay - y^2$ e dall'asse y abbia area $\frac{32}{3}$?

Soluzione:: la risoluzione di questo esercizio si basa sull'applicazione del teorema di Archimede, secondo il quale l'area del segmento parabolico è $\frac{4}{3}$ dell'area del triangolo ABC avente la stessa base e la stessa altezza del segmento, dove C è il punto di contatto della tangente t alla parabola parallela alla corda AB. (si veda la figura)



Il triangolo in figura ha base a e altezza $\frac{a^2}{4}$(il vertice di tale parabola ha infatti ascissa $\frac{a^2}{4}$). Si ha quindi

$$A = \frac{4}{3} \cdot \frac{a^2}{4} \cdot \|a\| \cdot \frac{1}{2} = \frac{\|a^3\|}{6} = \frac{32}{3}$$

da cui

$$a = \pm 4$$

EXERCISE 49. Si consideri la trasformazione

$$T : \begin{cases} x' & = & (a+b)x + (a-b)y \\ y' & = & (a-b)x + (a+b)y \end{cases}$$

(1) come devono essere scelti a e b affinché la T sia una affinità?
(2) per quali valori di a e b la T è una isometria?
(3) Per quali valori di a e b la T è una omotetia? Indicare il centro e il rapporto di tale omotetia.

Una affinità (o trasformazione affine) è un'applicazione biettiva T che fa corrispondere al punto P di coordinate x, y il punto P' di coordinate X, Y secondo la formula:

$$\begin{cases} X & = & ax + by + e \\ Y & = & cx + dy + f \end{cases}$$

dove i coefficienti a, b, c, d, e, f sono numeri reali. La trasformazione è biunivoca se $ad - bc \neq 0$.

Una affinità gode delle seguenti proprietà:

- trasforma rette in rette;
- a rette parallele corrispondono rette parallele;
- a rette incidenti corrispondono rette incidenti;
- conserva il rapporto fra segmenti paralleli (in particolare al punto medio di un segmento corrisponde il punto medio del segmento omologo);
- se la figura S' è l'immagine corrispondente di una figura S, allora $A_{S'} = | (ad - bc) | A_S$

In generale un'affinità non conserva la forma delle figure. Infatti l'immagine di un rettangolo è in generale un parallelogramma, così come l'immagine di una circonferenza è un'ellisse

Punto: (a): Da quanto detto sopra, la trasformazione è affine se $ad - bc \neq 0$, per cui

$$(a+b)^2 - (a-b)^2 \neq 0$$

svolgendo e sommando

$$a^2 + b^2 + 2ab - a^2 - b^2 + 2ab \neq 0$$

da cui si ricava

$$4ab \neq 0 \quad per\ a \neq 0 \quad b \neq 0$$

Punto: (b): Isometria è una trasformazione che conserva le distanze, cioè, dati due punti A, B l'isometria fa ad essi corrispondere due punti A', B' tali che: $AB = A'B'$. Le figure trasformate risultano congruenti a quelle date. Le isometrie riguardano simmetrie, traslazioni e rotazioni.

L'equazione di una isometria deve essere tale per cui $a^2+c^2=b^2+a^2=1$ e $ab+cd=0$.
Applicando al nostro caso, le due relazioni divengono

$$\begin{cases} (a+b)^2+(a-b)^2 & = & 1 \\ a^2-b^2+a^2-b^2 & = & 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} 4ab & = & 1 \\ a^2 & = & b^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} ab & = & \frac{1}{4} \\ a & = & \pm b \end{cases}$$

da cui si ottengono i due sistemi

$$\begin{cases} a & = & b \\ b & = & \pm\frac{1}{2} \end{cases} \qquad \begin{cases} a & = & -b \\ impos. \end{cases}$$

Punto: (c): Un'omotetia di centro O è una trasformazione dello spazio euclideo che "dilata" le distanze da O di tutti i punti secondo un fattore k.
Il punto O è il centro, mentre k è il rapporto dell'omotetia. Se $k>1$ la trasformazione ingrandisce la figura (come una diapositiva in un proiettore); se $k<1$ si ha un rimpicciolimento; se $k=-1$ si ha l'equivalente di una simmetria centrale. Le equazioni che caratterizzano una omotetia sono

$$\begin{cases} x' & = & kx \\ y' & = & ky \end{cases}$$

confrontando perciò tali equazioni con quelle assegnate nel testo dell'esercizio, si osserva che la trasformazione assegnata si riduce a questa se $a=b\neq 0$, divenendo

$$\begin{cases} x' & = & 2ax \\ y' & = & 2ay \end{cases}$$

l'unico punto lasciato fisso dalla trasformazione è il centro dell'omotetia, cioè nel nostro caso $O(0;0)$ e il rapporto di omotetia è $k=2a$.

EXERCISE 50. Determinare il numero delle soluzioni dell'equazione

$$xe^x+xe^{-x}-2=0$$

Soluzione:: Dovendo trovare solo il numero delle soluzioni, è possibile risolvere graficamente, in modo da studiare le intersezioni tra due funzioni nelle quali è possibile dividere quella assegnata.
Raccogliamo a fattor comune la x:

$$x\left(e^x+e^{-x}\right)=2$$

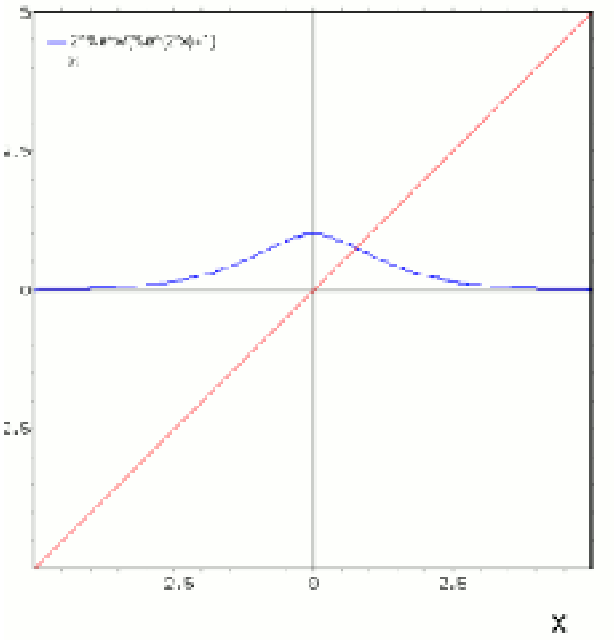
risolvendo rispetto a x, si ha

$$x=\frac{2}{e^x+e^{-x}}=\frac{2e^x}{e^{2x}+1}$$

in quanto $e^{-x}=\frac{1}{e^x}$.
Si può introdurre una variabile y tale che

$$\begin{cases} y & = & x \\ y & = & \frac{2e^x}{e^{2x}+1} \end{cases}$$

rappresentando graficamente entrambe le funzioni è possibile valutare il numero delle intersezioni e quindi delle soluzioni dell'equazione assegnata.



Come si può osservare l'intersezione è in un solo punto e quindi l'equazione avrà una sola soluzione.

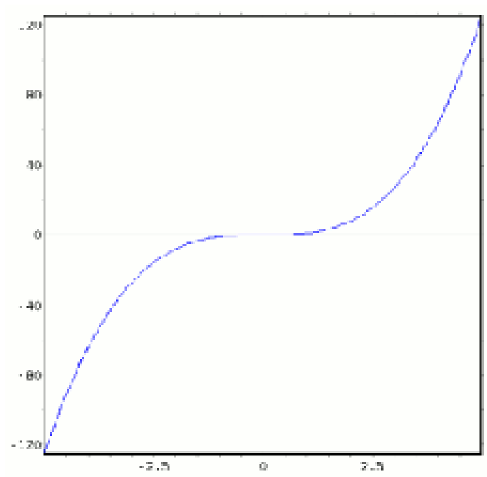
EXERCISE 51. Tracciato il grafico della funzione $g(x) = x^3$, dedurre il grafico γ della funzione:

$$f(x) = \exp\left(x^3 + 1\right)$$

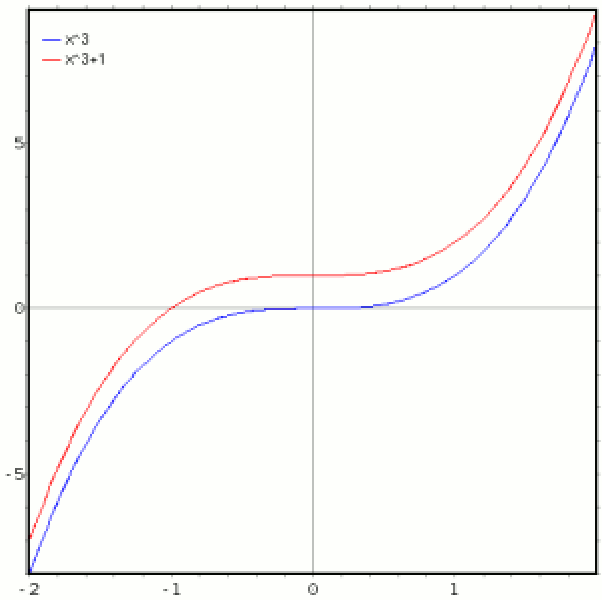
e rispondere ai seguenti quesiti:

(1) verificare che la f è invertibile;
(2) stabilire se l'inversa $f^{-1}(y)$ è derivabile in ogni punto del dominio e in particolare studiare la natura del punto $y_0 = e$

Soluzione:: Rappresentiamo prima la funzione $g(x) = x^3$ che è la classica funzione polinomiale di terzo grado. Il suo andamento dovrebbe essere noto. In ogni caso è definito su tutto l'insieme $\mathbb{R}$, è positiva per $x > 0$, la sua derivata è sempre positiva e quindi non vi sono max e min relativi, ha un flesso per $x = 0$, tende a $-\imath$ per le x decrescenti e viceversa per quelle crescenti. Il grafico è mostrato sotto:



Deduciamo ora il grafico richiesto: la funzione $x^3 + 1$ si ottiene mediante una semplice traslazione:

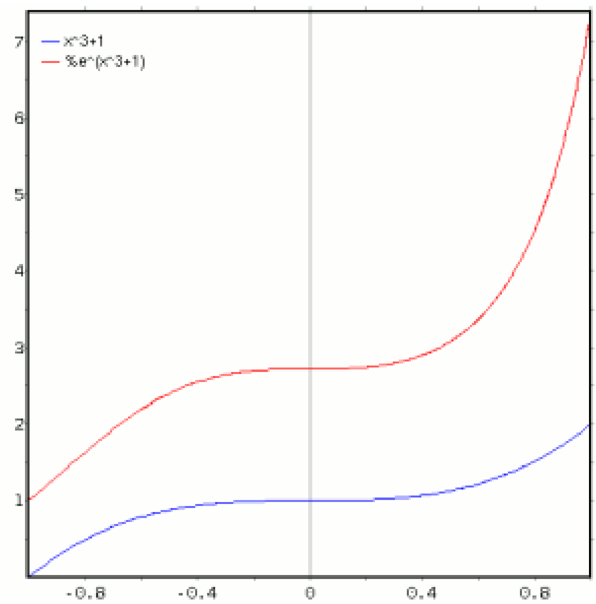


La funzione $\exp(x^3+1)$ sarà definita sull'intero insieme reale; sempre positiva e crescente, essendo la base dell'esponenziale >1; inoltre

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0 \qquad \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$$

la derivata seconda $f''(x) = 6x\exp(x^3+1) + 6x^4\exp(x^3+1) = 6x\exp(x^3+1)\left(1+x^3\right)$ mostra che la funzione presenta due punti di flesso per $x = 0, -1$.

La funzione avrà il seguente andamento:



Verifichiamo l'invertibilità della funzione:

$$x^3+1 = \ln y \qquad x = \sqrt[3]{\ln y - 1}$$

il dominio della funzione inversa è l'insieme $\mathbb{R}^+_{\not{}}$perché $y>0$ affinché sia definito il suo logaritmo.

Verifichiamo la derivabilità:

$$x' = \frac{1}{3}(\ln y - 1)^{-\frac{2}{3}}\frac{1}{y} = \frac{1}{3y\sqrt[3]{(\ln y - 1)^2}}$$

la derivata esiste $\forall y \in \mathbb{R}^+_{\not{}} -$, perché per $y = e$ il denominatore si annulla. Calcoliamo quindi

$$\lim_{y\to e} f^{-1}(y) = +\infty$$

ciò indica che per $y_0 = e$ si ha un punto di flesso a tangente verticale.

EXERCISE 52. Se $f(x)$ è una funzione derivabile con derivata prima continua in $[0;a]$ e se $f(0)=0$ dimostrare che
$$\int_0^a (a-x)\, f^{'}(x)dx = \int_0^a f(x)dx$$

Soluzione:: Integrando per parti il primo membro e applicando le condizioni assegnate, considerando $(a-x) = g(x)$ e $f^{'}(x)dx = h^{'}(x)$, si ha [ricordando che l'integrazione per parti $\int g(x)\, h^{'}(x)dx = g(x)h(x) - \int g^{'}(x)h(x)dx$]
$$(a-x)\,\|_0^a f(x) - \int_0^a (-1)\, f(x)dx =$$
$$(a-a)\, f(a) - af(0) + \int_0^a f(x)dx = \int_0^a f(x)dx$$

53. GRUPPO 4

EXERCISE 54. Scrivere le formule della traslazione che trasforma la parabola $y = x^2 - 4x + 5$ nella parabola $y^{'} = \left(x^{'}\right)^2$.

Soluzione:: Le equazioni della traslazione sono
$$\begin{cases} x^{'} & = & x+a \\ y^{'} & = & y+b \end{cases}$$
sostituiamo queste equazioni nella equazione della parabola traslata e confrontiamo i coefficienti ottenuti con quelli della parabola assegnata.
$$y+b = (x+a)^2$$
risolvendo
$$y = x^2 + 2ax + a^2 - b$$

Confrontando ora i coefficienti, si ottiene
$$\begin{cases} 2a & = & -4 \\ a^2 - b & = & 5 \end{cases}$$
da cui si ricava
$$a = -2 \qquad b = -1$$
Le equazioni della traslazione sono pertanto
$$\begin{cases} x^{'} & = & x-2 \\ y^{'} & = & y-1 \end{cases}$$
oppure
$$\begin{cases} x & = & x^{'}+2 \\ y & = & y^{'}+1 \end{cases}$$

EXERCISE 55. Determinare le costanti reali a, b, c in modo che per ogni x reale, risulti
$$y = 3x^2 - 5x + 1 = a\,(x+b)^2 + c$$
Da ciò dedurre il valore minimo di y. a quale punto del grafico corrisponde?

Soluzione:: Svolgo il polinomio a secondo membro
$$3x^2 - 5x + 1 = ax^2 + 2abx + ab^2 + c$$
Confronto i coefficienti dei due polinomi relativi al termine:
$$\begin{array}{rl} 2^\circ\, grado & a = 3 \\ 1^\circ grado & 2 \cdot 3b = -5 \\ & b = -\frac{5}{6} \\ termine\, noto & 3 \cdot \frac{25}{36} + c = 1 \\ & c = -\frac{13}{12} \end{array}$$
Per calcolare il valore di minimo, studiamo la derivata prima
$$y^{'} = 6x - 5$$

si ha

$$y' > 0 \quad per \quad x > \frac{5}{6}$$
$$y' < 0 \quad per \quad x < \frac{5}{6}$$

per cui

$$x_{min} = \frac{5}{6} \qquad y_{min} = 3 \cdot \frac{25}{36} - 5 \cdot \frac{5}{6} + 1 = -\frac{13}{12}$$

ricordando che il vertice di una parabola è così legato ai coefficienti dell'equazione $V\left(-\frac{b}{2a} = -\frac{5}{6}; -\frac{\Delta}{4a} = -\frac{13}{12}\right)$ si vede che questo punto di minimo è proprio il vertice, come si può intuire osservando che la parabola data ha concavità verso l'alto.

EXERCISE 56. Se $\log_r p = q$ e $\log_q r = p$ dimostrare che $\log_q p = p \cdot q$

Soluzione:: Per ottenere la dimostrazione, basta ricordare una delle proprietà dei logaritmi, in particolare quella relativa al cambio della base, cioè

$$\log_a x = \frac{\log_{10} x}{\log_{10} a}$$

pertanto

$$\log_r p = \frac{\log_q p}{\log_q r} = \frac{\log_q p}{p}$$

essendo per ipotesi $\log_q r = p$. Dall'espressione risulta subito che, essendo sempre per ipotesi $\log_r p = q$

$$\log_q p = p \cdot \log_r p = p \cdot q$$

EXERCISE 57. Determinare Dominio e Codominio della funzione

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{\| \tan x + 1 \|}}$$

Soluzione:: Ricordiamo brevemente il significato dei termini dominio e codominio

Il dominio D (o Campo di Esistenza, o anche insieme di definizione) di una funzione è il più ampio sottoinsieme di $\mathbb{R}$ costituito da tutti e soli i valori della variabile indipendente x per cui esistano finiti i corrispondenti valori di $y = f(x)$.

Il codominio C di una funzione è il sottoinsieme di $\mathbb{R}$ costituito da tutti gli elementi della variabile dipendente y associati ai punti x appartenenti al dominio della funzione.

Per individuare l'insieme di definizione di una funzione è necessario individuare innanzitutto il tipo di funzione (razionale, irrazionale, goniometrica, logaritmica, esponenziale, trascendente,..) e analizzare quali sono le operazioni, che caratterizzano la funzione, che non possono essere eseguite, che non consentono quindi di associare a determinati valori di x le loro immagini. Nel caso assegnato la funzione è composta e le limitazioni riguardano l'impossibilità per un denominatore di annullarsi e per una radice di indice pari di avere un radicando negativo. Imoltre, la funzione vede la presenza anche di una funzione goniometrica che non è definita per $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, dove il termine $k\pi$ è introdotto per descrivere la periodicità della funzione tangente, che si ripete uguale a se stessa ogni 180°.

La funzione assegnata non avrà mai un radicando negativo, in quanto il modulo di $\tan x + 1 > 0$ per ogni valore di x. Basterà quindi stabilire elimare i valori della x per i quali

$$\tan x + 1 = 0$$

cioè

$$x = \frac{3}{4}\pi + k\pi$$

e l'insieme di definizione sarà

$$D = \mathbb{R} - \left\{ \frac{3}{4}\pi + k\pi, \frac{\pi}{2}\pi + k\pi \right\}$$

con $k \in \mathbb{Z}$

Per determinare il codominio risolviamo la funzione rispetto a y, cioè costruiamo la funzione inversa:

$$y^2 = \frac{1}{\| \tan x + 1 \|} \qquad \tan x = \pm \frac{1}{y^2} - 1$$
$$x = \arctan\left(\pm \frac{1}{y^2} - 1 \right)$$

il codominio sarà pertanto

$$C = \mathbb{R}_0$$

in quanto nella relazione sopra indicata la y, che compare al denominatore, non può essere uguale a 0.

EXERCISE 58. Dopo aver determinato il campo di esistenza della funzione

$$f(x) = 1 - \sqrt{4 - \|x^2 - 1\|}$$

tracciarne il grafico, indicando il massimo, il minimo.

Soluzione:: la presenza della radice quadrata impone che il suo radicando sia sempre non negativo; ciò si traduce in

$$4 - \|x^2 - 1\| \geq 0$$

cioè

$$\|x^2 - 1\| \leq 4$$

la disequazione si divide pertanto nelle due parti

$$\begin{array}{cc} x^2 - 1 \leq 4 & per \quad x \leq -1 \vee x \geq 1 \\ -\left(x^2 - 1\right) \leq 4 & per \quad -1 < x < 1 \end{array}$$

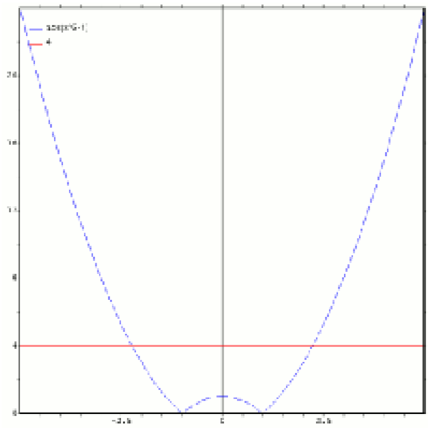
ottenendo

$$\begin{array}{cc} x^2 \leq 5 & -\sqrt{5} \leq x \leq -1 \vee 1 \leq x \leq \sqrt{5} \\ x^2 + 3 \geq 0 & -1 < x < 1 \end{array}$$

il campo di esistenza sarà pertanto

$$C.E: -\sqrt{5} \leq x \leq \sqrt{5}$$

mostriamo la risoluzione della disequazione anche graficamente



- per studiare la funzione, possiamo considerarla formata da

$$\begin{array}{ccc} y = 1 - \sqrt{5 - x^2} & per & x < -1 \vee x > 1 \\ y = 1 - \sqrt{3 + x^2} & per & -1 < x < 1 \\ y = -1 & per & x = \pm 1 \end{array}$$

vogliamo determinare quando la funzione è positiva ($f(x) > 0$)
la prima condizione è

$$\sqrt{5 - x^2} < 1$$

che è verificata per, tenendo conto del C.E., $-\sqrt{5} < x < -2$ o per $2 < x < \sqrt{5}$;
la seconda condizione è

$$\sqrt{3 + x^2} < 1$$

che non è mai verificata
la terza condizione rappresentata una funzione costante. Pertanto la funzione risulta positiva per

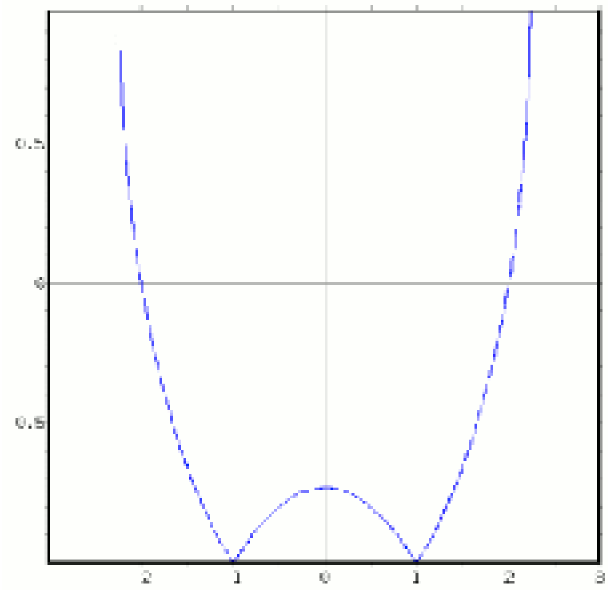
$$f(x) > 0 \;\; per \quad -\sqrt{5} < x < -2 \vee 2 < x < \sqrt{5}$$

- calcoliamo il max e min della funzione nei due casi

$$\begin{array}{ccc} y = 1 - \sqrt{5 - x^2} & y' = \frac{x}{\sqrt{5 - x^2}} & 1 < x < \sqrt{5} \\ y = 1 - \sqrt{3 + x^2} & y' = -\frac{x}{\sqrt{3 + x^2}} & -1 < x < 0 \end{array}$$

ciò determina un max per $x = 0$, e due minimi per $x = -1$.

- calcoliamo il comportamento della funzione agli estremi del C.E
$$\lim_{x\to\pm\sqrt{5}} f(x) = 1 - 0 = 1$$
- la forma grafica della funzione risulta la seguente



EXERCISE 59. Dare la definizione di **parte aurea** di un segmento. Se un segmento misura l, quanto misura la sua parte aurea? Dimostrare che il lato del decagono regolare è la parte aurea del raggio della circonferenza ad esso circoscritta.

Soluzione:: Prendiamo un segmento e dividiamolo in due parti in modo che il rapporto tra la lunghezza della parte maggiore e della minore sia uguale al rapporto tra la lunghezza dell'intero segmento e della parte maggiore. La parte o **sezione aurea** di un segmento rappresenta la parte maggiore che risulta essere media proporzionale tra la parte minore e l'intero segmento.
Se la lunghezza di un segmento misura l, possiamo indicare la sua parte aurea con x; la parte rimanente sarà $l-x$. Applicando la proporzione si ha
$$l : x = x : (l-x)$$
da cui
$$x^2 + lx - l^2 = 0$$
risolvendo si ha, prendendo solo la soluzione positiva in quanto rappresenta la lunghezza di un segmento,
$$x = \frac{-l+\sqrt{5l^2}}{2} = \frac{l\left(\sqrt{5}-1\right)}{2}$$
finire